欧姆社学习漫画

漫画傅里叶解析

〔日〕涉谷道雄/著
〔日〕Haruse Hiroki/漫画绘制
〔日〕株式会社TREND-PRO/漫画制作
陈　芳/译

科学出版社
www.sciencep.com

KindleDX出版署

✿前　言✿

本书是为掌握傅里叶变换、傅里叶解析的基础知识而编写的入门图书。

傅里叶解析的应用并不局限在物理学领域，它在工业制造等方面都有广泛的应用。傅里叶解析是以傅里叶变换的数学方法为基础的分析方法。通常读者都会认为“数学=公式”，但是，学习数学很重要的一点，不是记住公式，而是理解概念和掌握数学思维的方法。

因此，为了能理解傅里叶解析这个概念，需要具备一些基础知识。学习傅里叶变换必要的基础知识是微积分和三角函数，掌握这些基本知识的概念非常重要。在高中，我们学习三角函数（sin、cos、tan、cot）是以直角三角形的两条边的比为依托，以此贯穿着相关的公式换算。而本书将三角函数与随时间变化的旋转运动联系起来，转换为与运动相关的函数，这样有利于理解本书要讲解的知识。

本书可以说是一本从傅里叶解析的角度编写的关于三角函数的参考书。本书中只有一些必要公式的证明。大家在阅读本书时重要的不是记住这些公式，而是掌握利用这些公式推导出新的计算方法的思路。现在许多教材和参考书，集中了很多怎样记忆公式的方法和列举了大量例题的计算过程。高中或大学的考试中，都有运用这些公式的题目，因此，为了通过考试，将整个例题都背下来的人不在少数。

傅里叶变换，是以多个数学知识为基础而推导出来的新概念。理解了这个概念，与单纯地记住公式有完全不同的效果。在本书中，学习应用范围广泛的傅里叶解析，我们采用的例题是“声音”，通过对各种各样的声音进行分析，就会有很多让人耳目一新的发现。

在此，感谢 re_akino 先生用有趣的故事将满是数学公式的傅里叶解析编排得引人入胜，感谢漫画家 Haruse Hiroki 将这个故事绘成了精彩的漫画。最后，对一直给予大力支持和帮助的欧姆社的诸位表示诚挚的谢意。

涉谷道雄

✿目　　录✿

序 章

声 波


对了！
找到主唱了吗？
还没有！

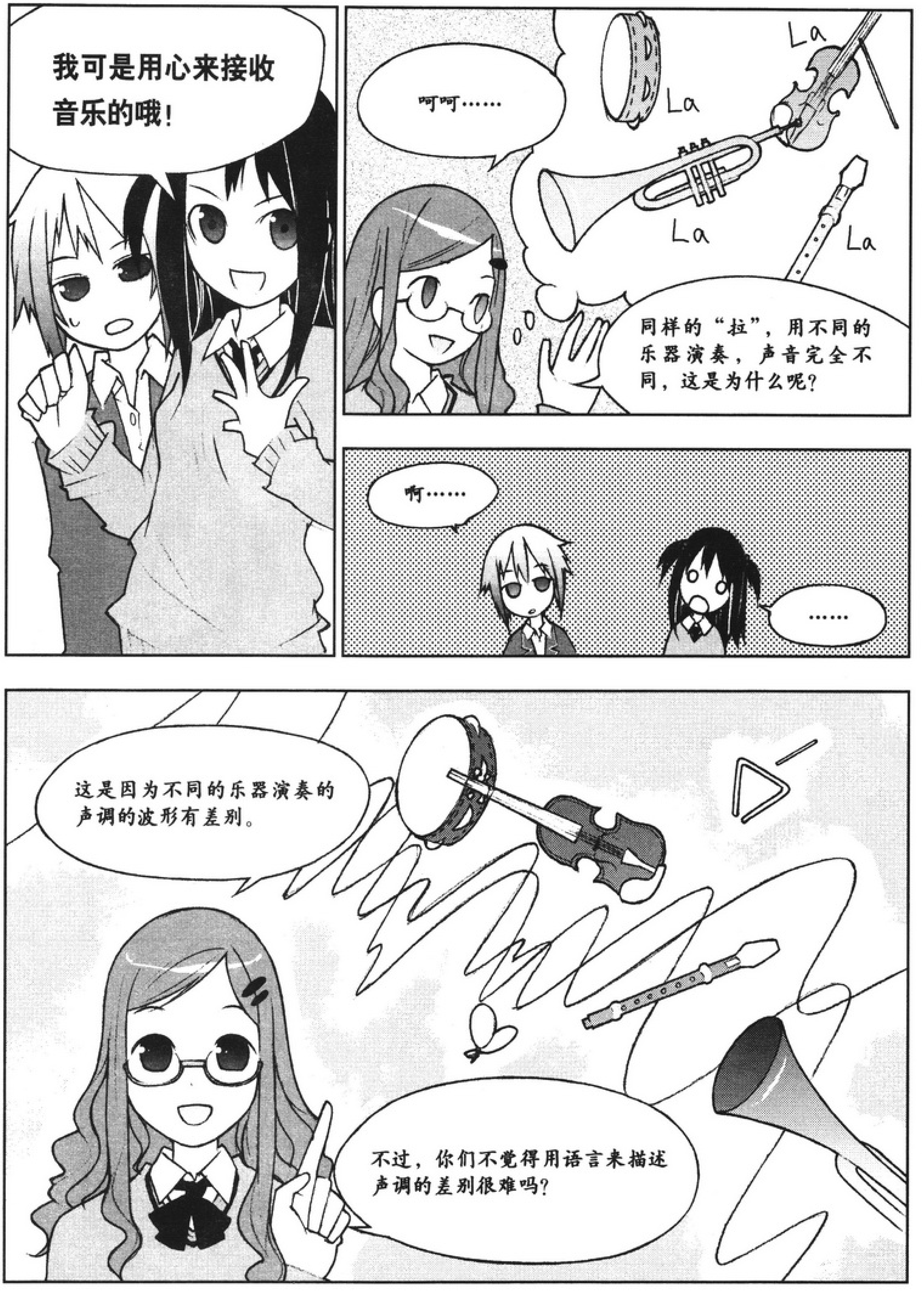
难得有这么好的吉他手和贝司手。
鼓手也就位了！
文香要是能当主唱就好了！为什么很少听你唱歌呢？
哦？
她五音不全。
啊！神赐予了我这样的音乐才能和美貌，
却没有赐予我美妙的声音！

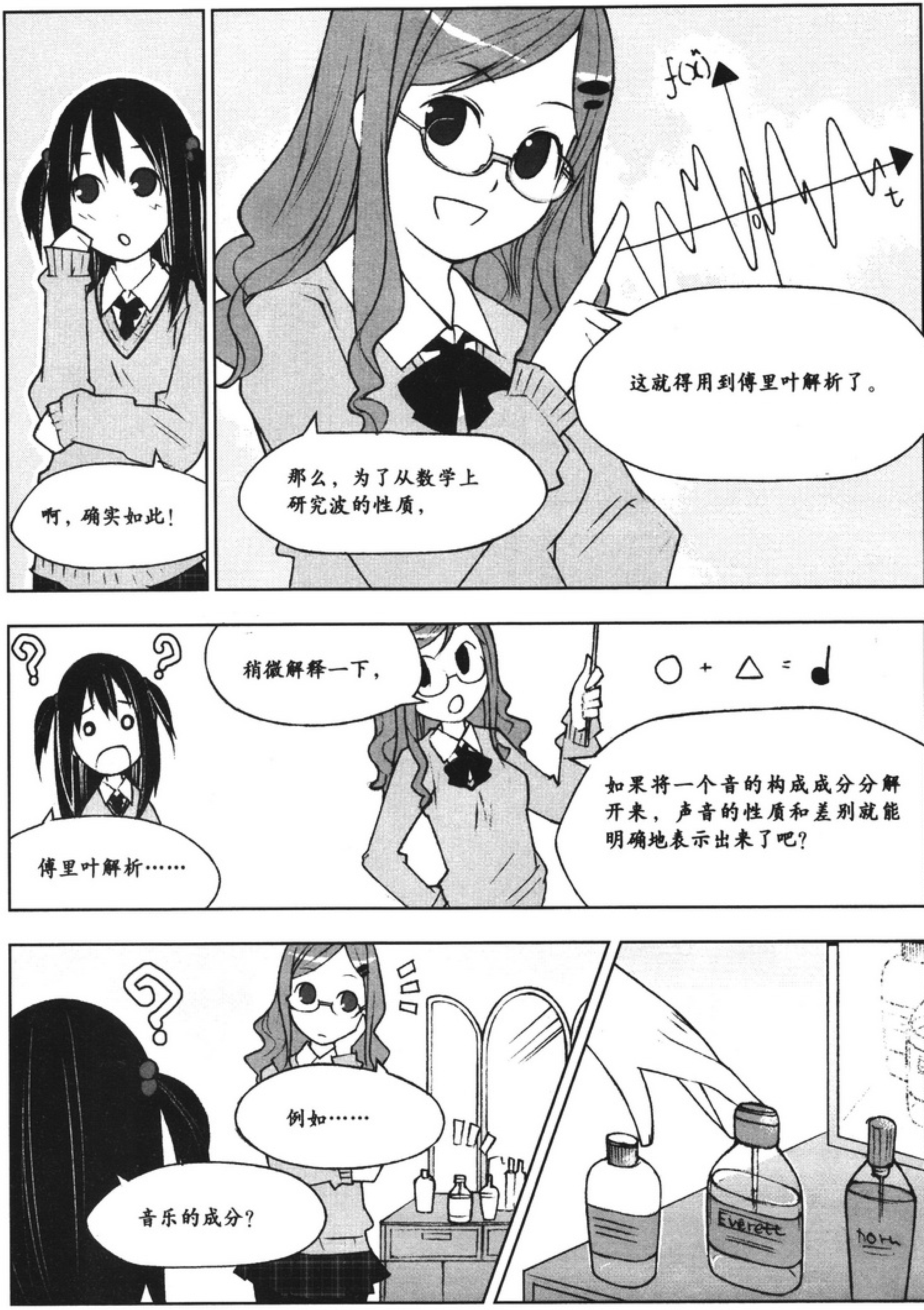

先不说声音小且沉默
寡言的铃了。
绘里奈不可以当主
唱吗？
啊……
站在舞台上唱歌这种事……
太丢人了，我可做不到！
我看还是找
找由希吧！
HAHAHAHA
由希—
由希—
由希！？
不行，不行！
那个家伙对女孩子比对
音乐还感兴趣！
我跟他从小就是朋友，
那个家伙的事情我是
知道得最清楚的了……


但是，如果由希当主唱的话，
我们的乐队肯定会很受欢迎，
交际圈也能扩大。
而且他对文香
有意思……
哪有这种事情！
真没办法……
现在找主唱的事情
暂且不说，还有
一个问题……
啊，什么事情啊？
这次数学考得
很烂……

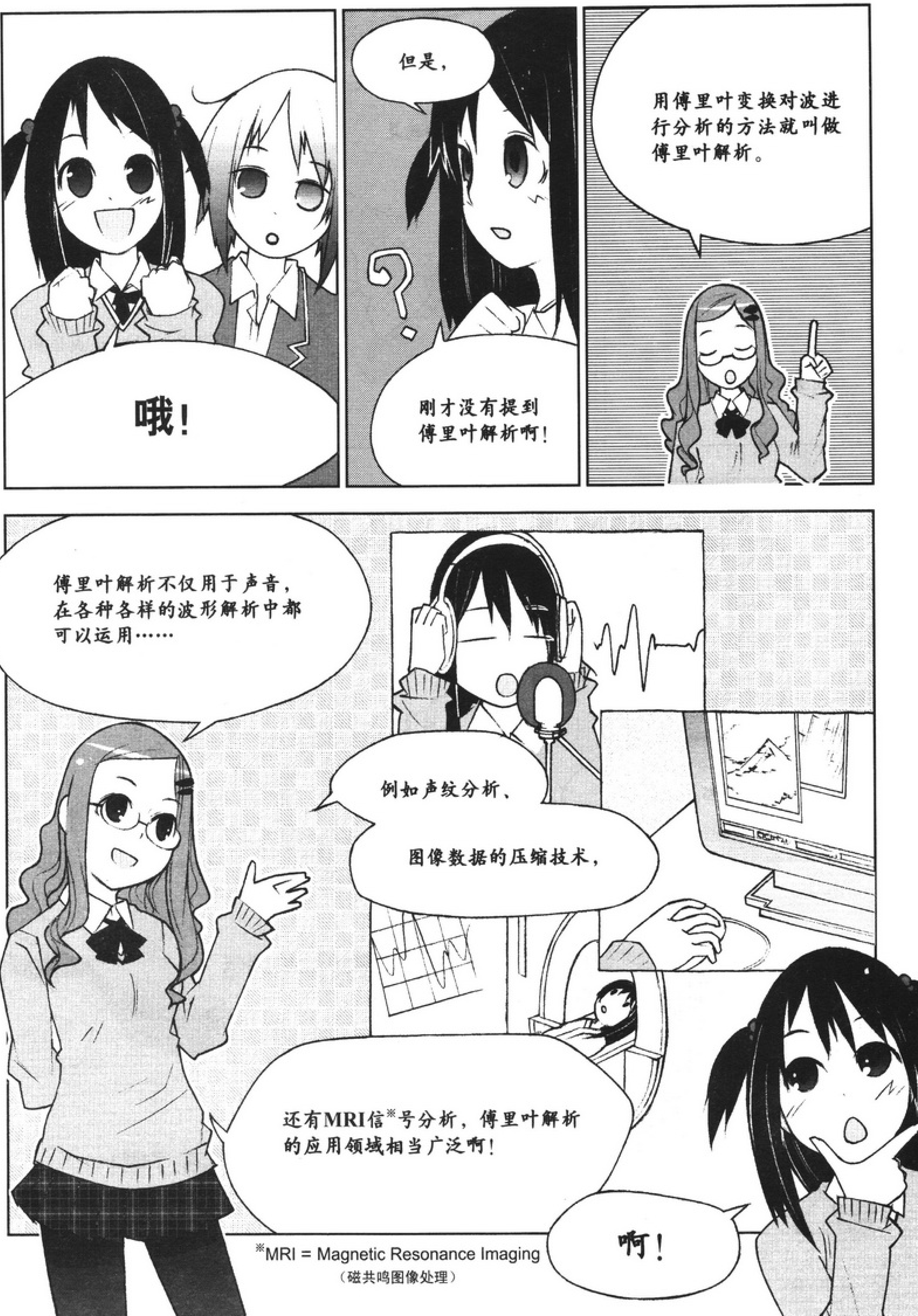

32
フミカ〜〜!!
如果下次还考这么点分，
就没收你的吉他！
这样一来，
乐队就会有生存危机了！
……
铃的成绩还能将就过去，
但数学也不是很好。
绘里奈就不错！
又是大家闺秀，
人又聪明……
而且还在学大学水平的课程……

数学这东西有什么用嘛？
呀，有用处啊！
例如……
例如，
5
7
2
3
有与音乐有关的
数学知识。
与音乐有关？
那可是必须要听的啊！
空气
声音
耳膜
哦，这样啊！
知道吗？声音是通过空气的
振动来传播的。
空气
声音是一种在空气中传播的波，
通过振动人的耳膜而被人听到。


我可是用心来接收音乐的哦！
呵呵……
La
La
La
La
同样的“拉”，用不同的乐器演奏，声音完全不同，这是为什么呢？
啊……
……
这是因为不同的乐器演奏的声调的波形有差别。
不过，你们不觉得用语言来描述声调的差别很难吗？


啊，确实如此！
那么，为了从数学上研究波的性质，
这就得用到傅里叶解析了。
f(x)
t
0
稍微解释一下，
傅里叶解析……
如果将一个音的构成成分分解开来，声音的性质和差别就能明确地表示出来了吧？
例如……
音乐的成分？
Everett


香水，
可以分为香甜系和橘桔系之类的，但是严格地说，即使是相同的橘桔系的香水，也是有差别的。
嗯……
玫瑰5%
马利诺佛4%
手柑
樱桃1%
这是因为组成的成分和各成分的含量不同，声音也是同样的道理。
以香水为例，用来分析组成成分和含量的数学方法就是傅里叶解析。
换成声音，那么就能明白组成声调的因素了。
原来如此！



※MRI = Magnetic Resonance Imaging
（磁共鸣图像处理）

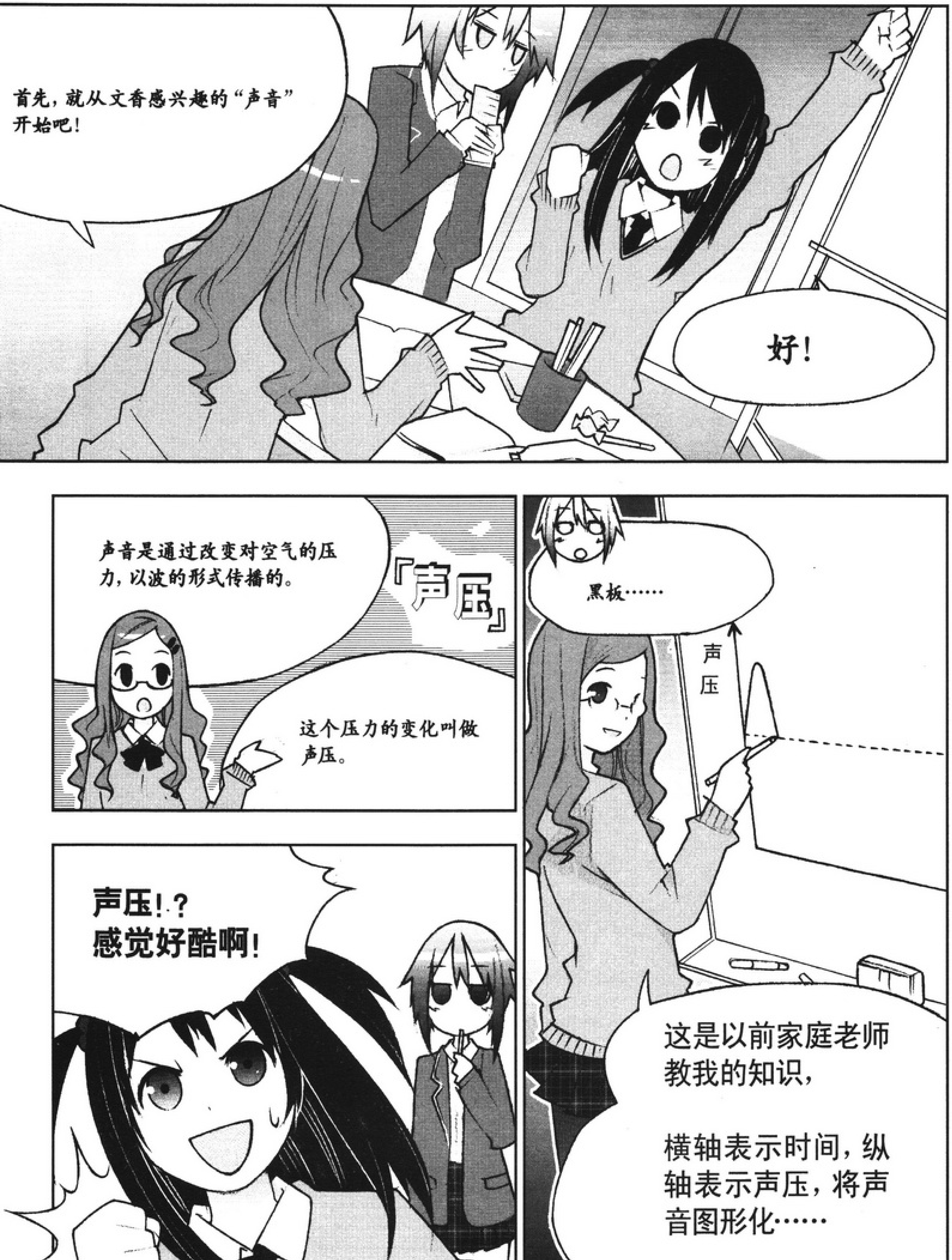

合成器运用的就是
这个原理。
效应器是通过改变成分而
改变声音的特征。
而且如果知道了成分，那
么，根据各种成分就能制
作出某种特定的声音。
啊，那么说……
ドカーー
?
不懂傅里叶解析的话，
对音乐就没有发言权了啊!!!


什么呀……
也不至于……
总……总而言之，
那就教我傅里叶变换吧！
但，但是……
$\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}$
要学习傅里叶变换，有必要先学习其预备知识——三角函数和微积分。
等一下……
就这样！
以三角函数和微积分为目标，开始刻苦学习吧！

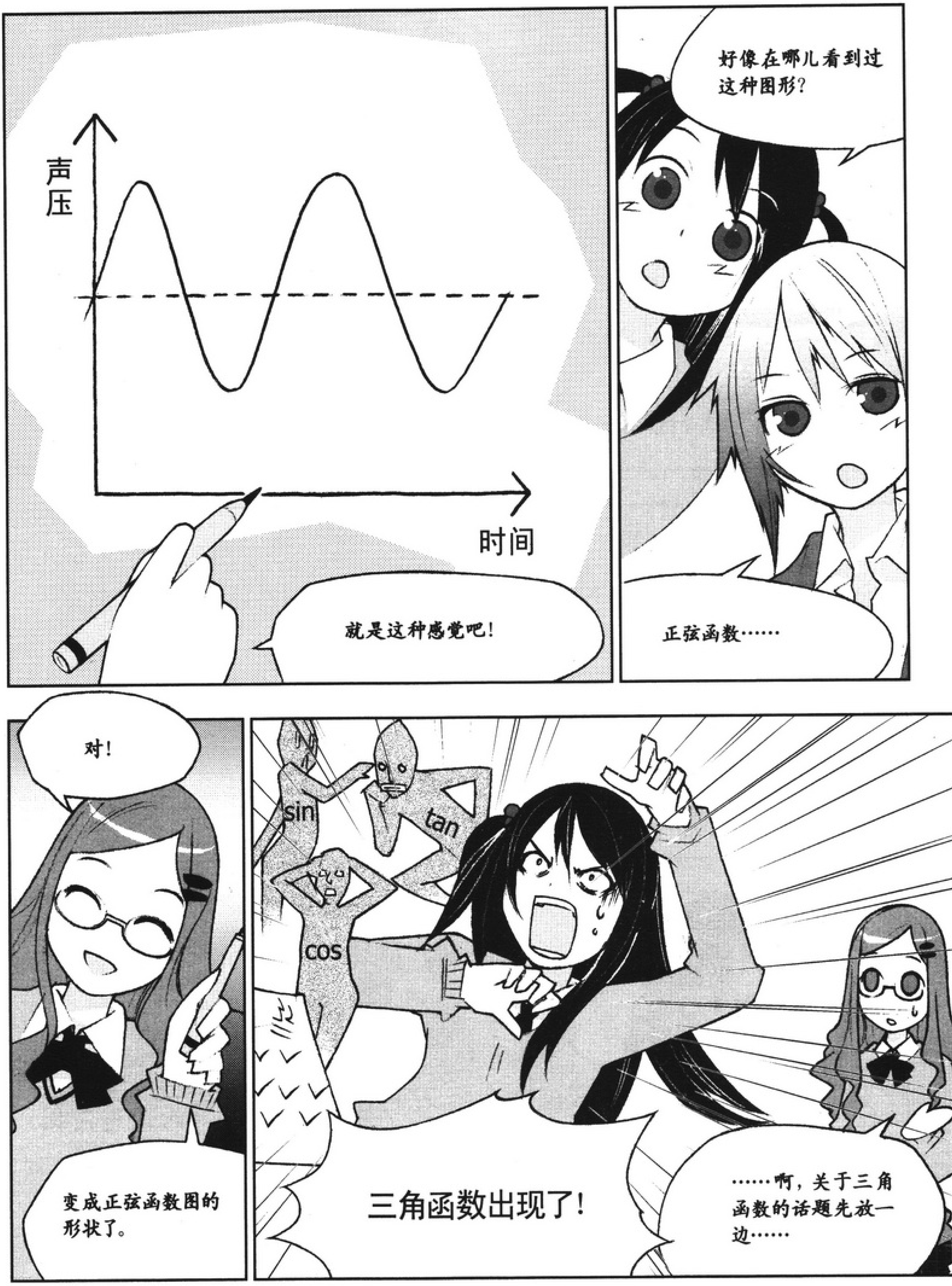

哈哈哈，
好，那就来学习吧！
好啊！

第1章
通往傅里叶变换的道路

1. 声音与频率



首先，就从文香感兴趣的“声音”开始吧！
好！
声音是通过改变对空气的压力，以波的形式传播的。
『声压』
这个压力的变化叫做声压。
黑板……
声压
这是以前家庭老师教我的知识，
横轴表示时间，纵轴表示声压，将声音图形化……
声压！？感觉好酷啊！


声压
时间
就是这种感觉吧！
好像在哪儿看到过这种图形？
正弦函数……
对！
变成正弦函数图的形状了。
sin
tan
cos
三角函数出现了！
……啊，关于三角函数的话题先放一边……


音叉发出的声音是
最简单的声音，能形成这样的波形。
哦！
1秒内一个相邻的波峰和波谷的波形往返重复的次数就叫做频率，单位为Hz（赫[兹]）。
频率
1 秒
=440Hz =“拉”
顺便说一下，“拉”音以音叉发出的440Hz的音为基准，不同的倍数能得到很多不同音调的“拉”音。
那频率，在收音机中怎么用呢？
收音机中使用的叫广播频率，
例如630kHz的电波，就表示1秒内电波振动了63万次。


1秒内振动
63万次！！
回到声音的话题上，像音叉这些简单的音叫纯音。
纯音
平常的声音
平时听到的声音，波形虽然看着简单，但是实际是很复杂的波形。
吉他也是？
当然！
不过……
复杂的波形
简单波形的合成
复杂的波形其实是由简单的波形合成得到的。
哦！

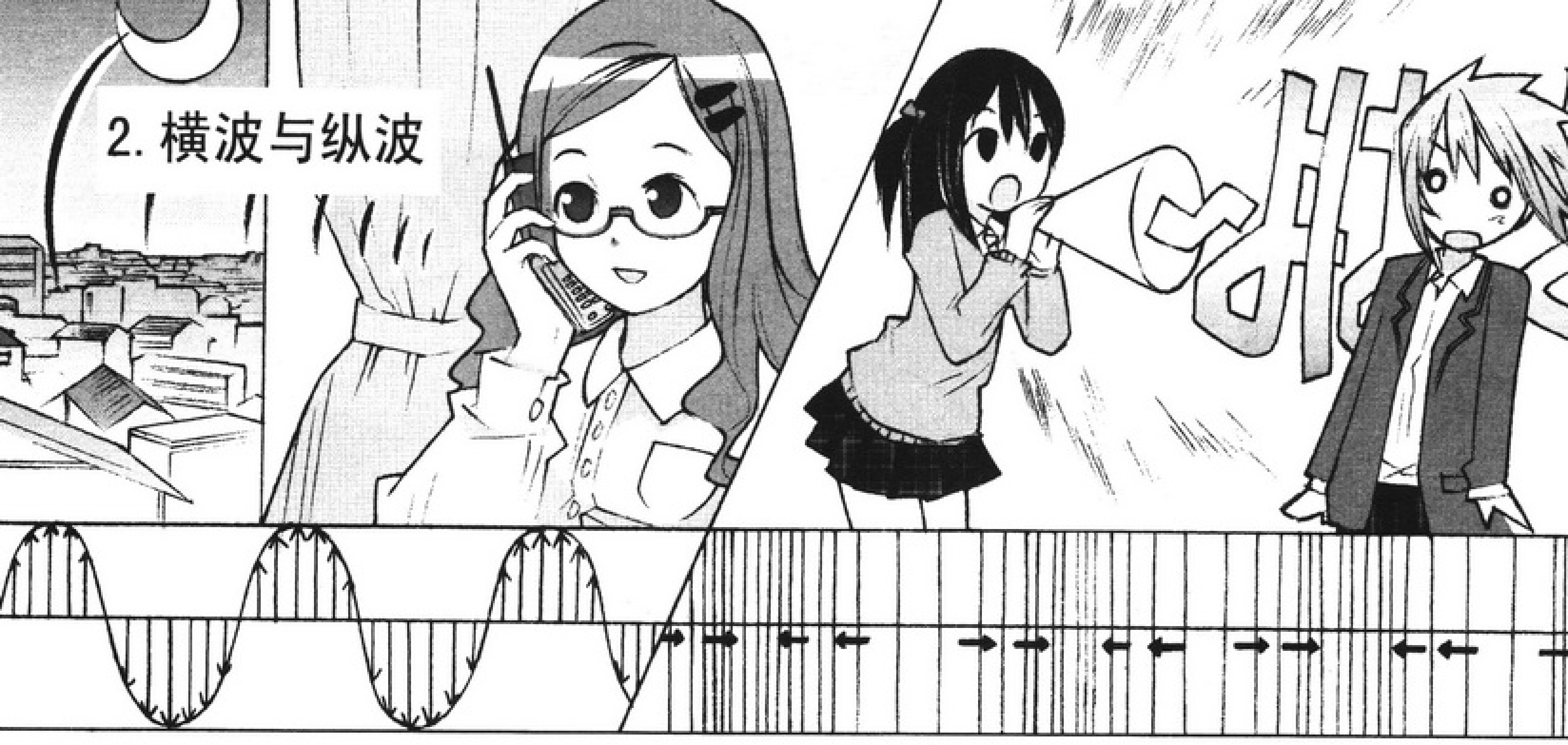

频率成分 1 的强度
频率成分 2 的强度
频率成分 3 的强度
强度
频率
构成复杂波形的简单波形叫做频率成分。
将各个合成频率成分及其强度用图形表示，可以得到频率谱，简称谱。
明白了频率谱有什么用处吗？
明白了频率谱就能明白声音的基本组成成分了。
就能明白声音的成分啦！


对啊！这就是
傅里叶变换。
是从波形中得到频率
谱的方法！
哦！
反过来，
也可以从频率谱中得
到波形……
傅里叶变换
强度
频率
物理量
时间
傅里叶逆变换
这叫做傅里叶逆变换。
傅里叶逆变换？
傅里叶
啊啪啪啪
傅里叶逆变换……


那么，
用傅里叶变换研究频率谱的特征的方法，
叫做傅里叶解析。
用傅里叶变换进行傅里叶解析……
要理解傅里叶解析的概念，
这就是我们应该学习的目标啊！
那我们就用有利于音乐活动且最有代表性的应用例子——音乐声音的解析开始吧！
！


就用这个！
利用这个能找到很好的主唱吧！
这，这样能行吗？
……
总而言之，
为了理解傅里叶解析，学习关于波的性质和数学知识的准备都是有必要的，早点进行这样的准备吧！
好啊！

2. 横波与纵波



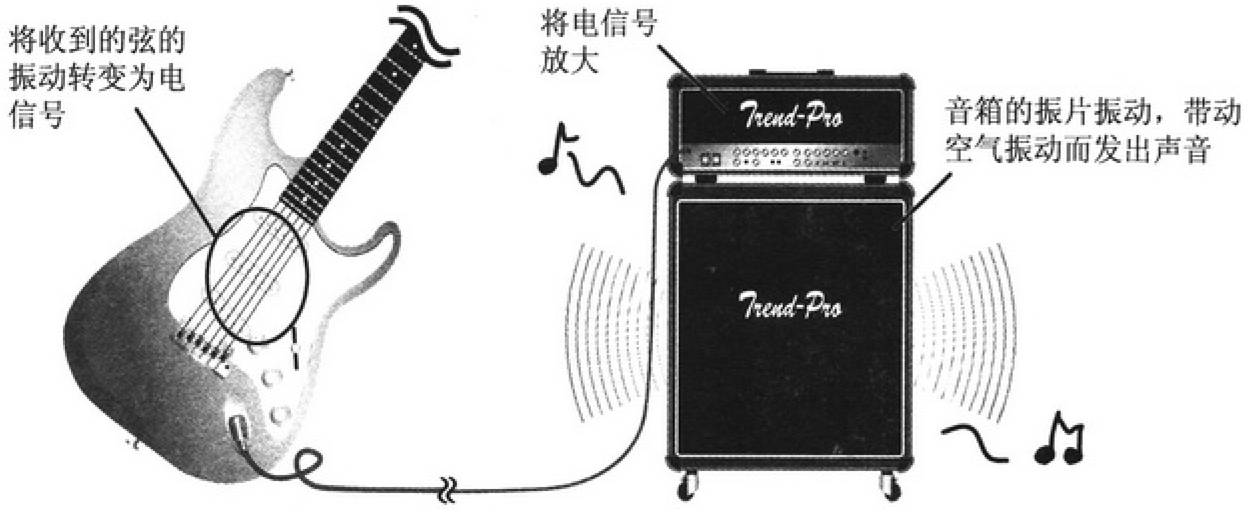
前面讲了声音，以波的形式传播的还有电波和光。电波和光波也是肉眼看不到的，不过，声音、电波和光波都可以用波的图形来形容。

这样啊！

声波、电波和光波——这些用眼睛看不到的波，可以用检测器转换为电信号来观察。

吉他的声音从扩音器里出来，也是由于声波被转换为电信号了吗？

对！准确地说，最后的声音不是从扩音器里出来的，而是从它的音箱里出来的。吉他的扩音器将弦的振动（微弱的声音）转换为电信号，并将这个电信号放大，这个信号震动了音箱的振片，从而使空气振动，这样声音被人的耳朵接收到（图1.1）。



◆图1.1　吉他弦的振动变成电信号，转换为声音播放出来

呃！

研究一下捕捉到的弦振动的信号，会观察到先前用来说明声音的例子中的波形。到此为止，波的概念讲清楚了，不过波还分为横波和纵波两种类型，首先讲一下这个概念。

啊！波还分类型啊！

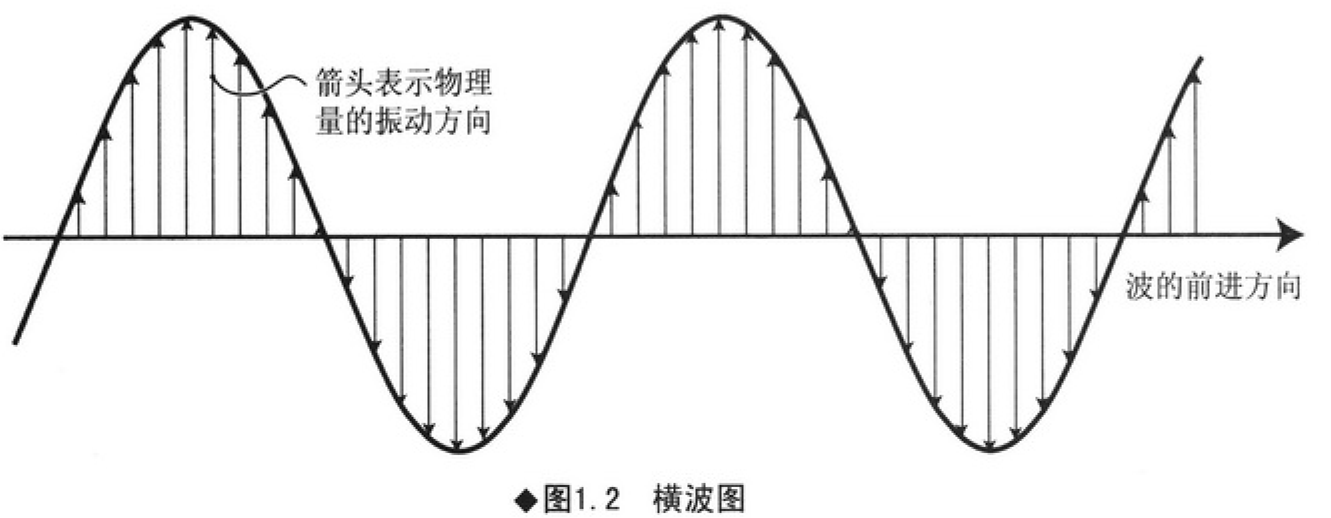
觉得很意外吧！首先说电磁波、收音机、电视机播放使用的波，手机通信用到的波，眼睛感受到的光，还有热波（红外线），这些都属于电磁波，它们具有相同的物理性质。这些电磁波在真空中的传播速度都是 30 万 km/s （在空气中的传播速度与此差不多）。

以前在电视里听到过， 声波在空气中的传播速度达到 340km/s， 这样一比电磁波实在太快了！

对啊！在电磁波中，电场和磁场的强度随时间变化，且它们的方向与波的传播方向垂直，这样的波叫横波。

这是怎么回事?

现在想象一下，自己与电磁波传播方向齐头并进，电场和磁场沿着自己左右和上下方向变化。这样，电磁波在真空中也能传播（图1.2）。



◆图1.2　横波图

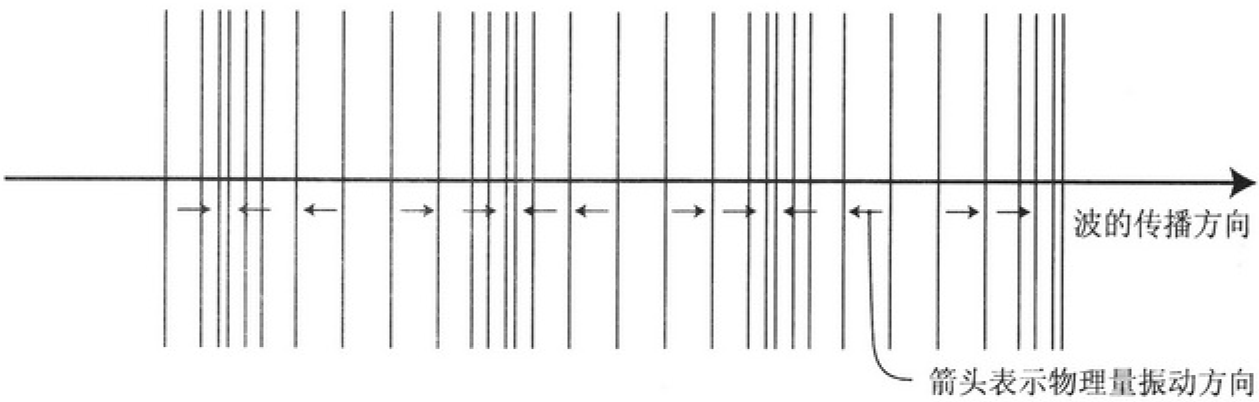
原来如此啊……

声音也是横波吗?

怎么可能……声音是纵波。

这是怎么回事啊？

声音是利用空气的振动，使空气的密度变高变低来传播的。现在想象一下自己与声波传播方向齐头并进，同时空气的密度在自己前后方向上变化，像这样，波的传播方向与振动方向相同的波叫做纵波（图1.3）。



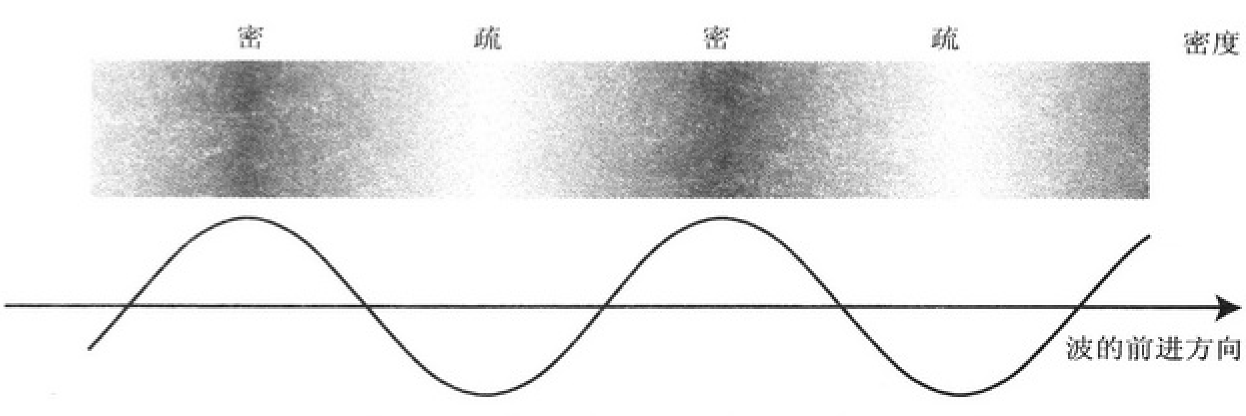
◆图1.3　纵波图形

看着像弹簧一样的运动呢！

形容得很形象啊！具有纵波性质的波，需要传递密度的变化，因此需要媒介，不能在真空中传播。媒介不止有像空气这样的气体，还有像水之类的液体，木材、金属之类的固体，都可以传递纵波。

嗯……

纵波，在传播方向上使媒介的密度变高变低，因此也叫疏密波，用密度的变化把疏密波图形化，可以得到与横波相同的图形（图1.4）。



◆图1.4　疏密波与密度变化对应图

像这样，不论横波还是纵波，都可以用正弦函数 sin 来表示。整理一下，横波中电场和磁场在与前进方向垂直的上下（左右）方向上变化，用图形表示是正弦函数 sin。纵波（疏密波）中密度的变化用图形表示出来也是 sin 函数。

这样就行了吗？

啊……还不够，傅里叶变换与三角函数有密切关系。总之，现在应该有“原来是这样啊”的感觉，请记住讲过的知识。

3. 波的时间变化

说到波，首先想到的是池塘里的水面泛起的波纹吧？

嗯，是这样。

请想象一下，池塘里的水面浮有树叶，往池塘里投入一块小石头，水面会泛起同心圆状的波纹。树叶会保持在原来的位置上上下晃动。

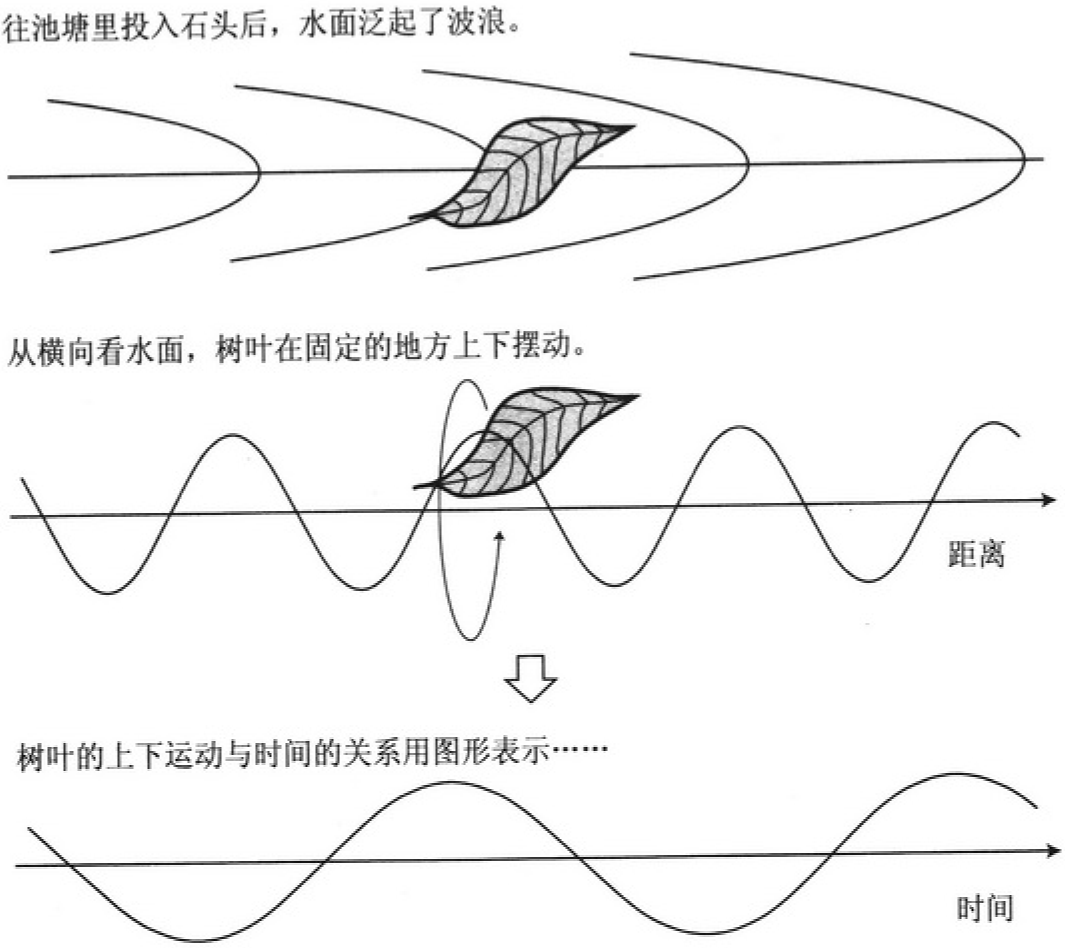
啊……确实是这样。

看这个波纹传播的情况，可以发现波峰和波谷交替前进，而水面的某一点也在上下运动，相互保持独立。

演唱会时人形成的人浪也是这样……

是啊！每个人的手一上一下的，从整体看就像行进中的波浪一样。

是这种感觉。波往前传播，并不是水面在移动，而是振源处水的振动，带动附近的水上下振动，而附近的水又作为振源带动其附近的水上下振动……这样，波就传播开来了（图1.5）。



◆图1.5　在波浪中晃动的树叶随时间变化的运动

原来如此啊！

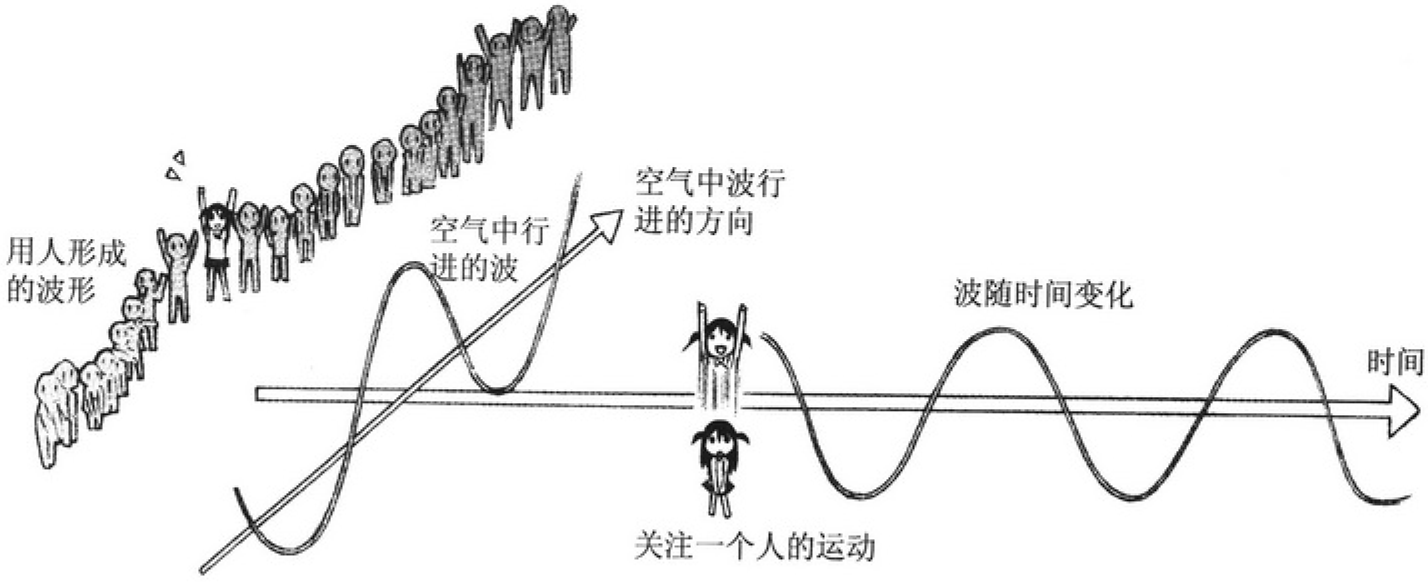
波的传播是波的最前面的部分不断前进。你们知道波形是怎么一回事吗？

波与波形不一样吗？

是啊！我们还是用人浪为例吧，人浪是一排人按顺序将手上下晃动而形成的波。

嗯……

从远处看，手在上面的人相当于处于波峰位置，波峰在不断前进，但是只看一个人，这个人只是随着时间变化将手上下摆动而已，关注这个人的运动，手随时间上下运动而得到波形（图1.6）。



◆图1.6　波随时间变化图

呵呵……

明白了吗？就像之前看到的，电波（包括光的电磁波＝横波）、声波（疏密波＝纵波），它们随时间变化都可以得到波形。通常，自然界中存在的波形有简单的波形，还有复杂的波形。

复杂……

之前也讲过，复杂的波形是由多个简单的波形混合而成的，由多个简单波形合成得到复杂波形是支持傅里叶变换的基础。

简单……

换种说法，简单波形的合成， 用来研究其中的频率和强度的数学方法就叫做傅里叶变换。

傅里叶变换……

说了好多啊，你好聪明啊，铃！

……啪啪！（打文香的声音）

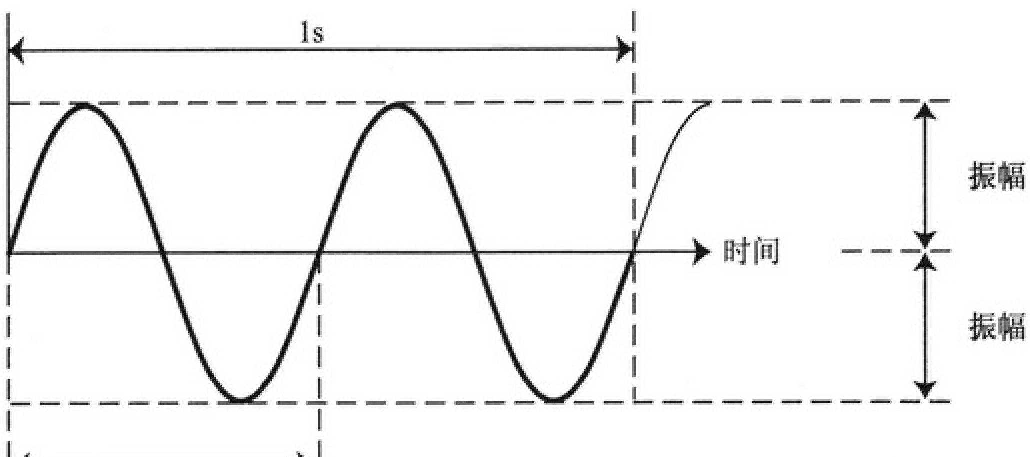
呜……

4. 频率与振幅

信号和波形的概念已经明白了，那么来学习频率和振幅，形成对傅里叶变换的初步认识吧！

好！频率刚才听说了，振幅是什么？

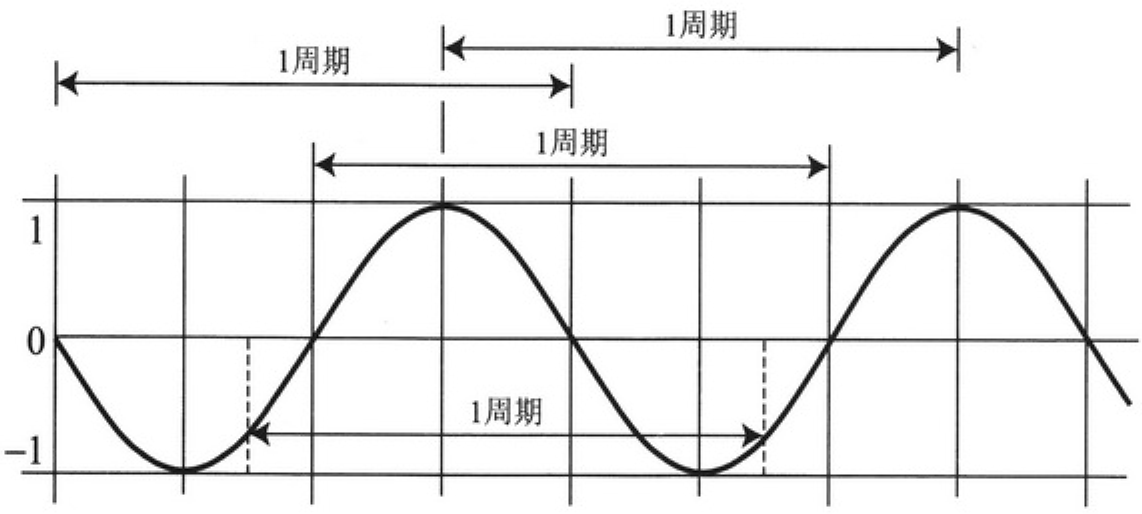
振幅是信号的高低差，波形中相邻的一个波峰和波谷的时间长度叫周期，之前讲过频率是一秒内波振动的次数，放到波形中，就是指一秒内有多少个周期。如图 1.7 所示，它用了频率为 2Hz 的例子。



◆图 1.7　2Hz 信号周期与振幅图

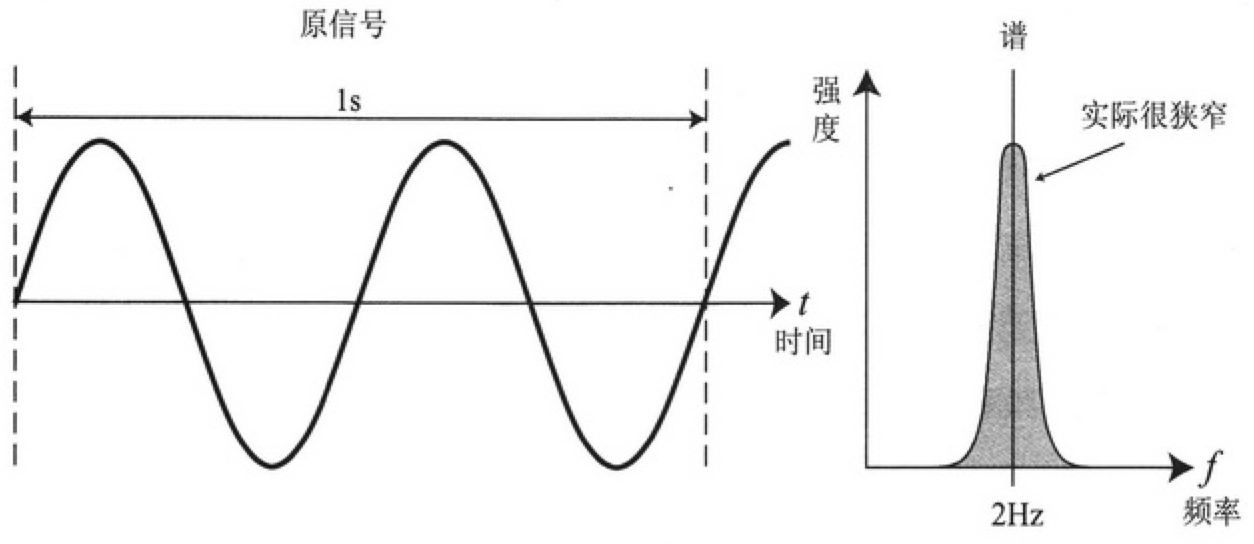
哦!

还有， 1 个周期并不一定非要从 0 开始算，也可以从一个波峰到相邻一个波峰的时间长度，或者是一个波谷到相邻一个波谷的时间长度（图 1.8）。



◆图1.8　1个周期的概念

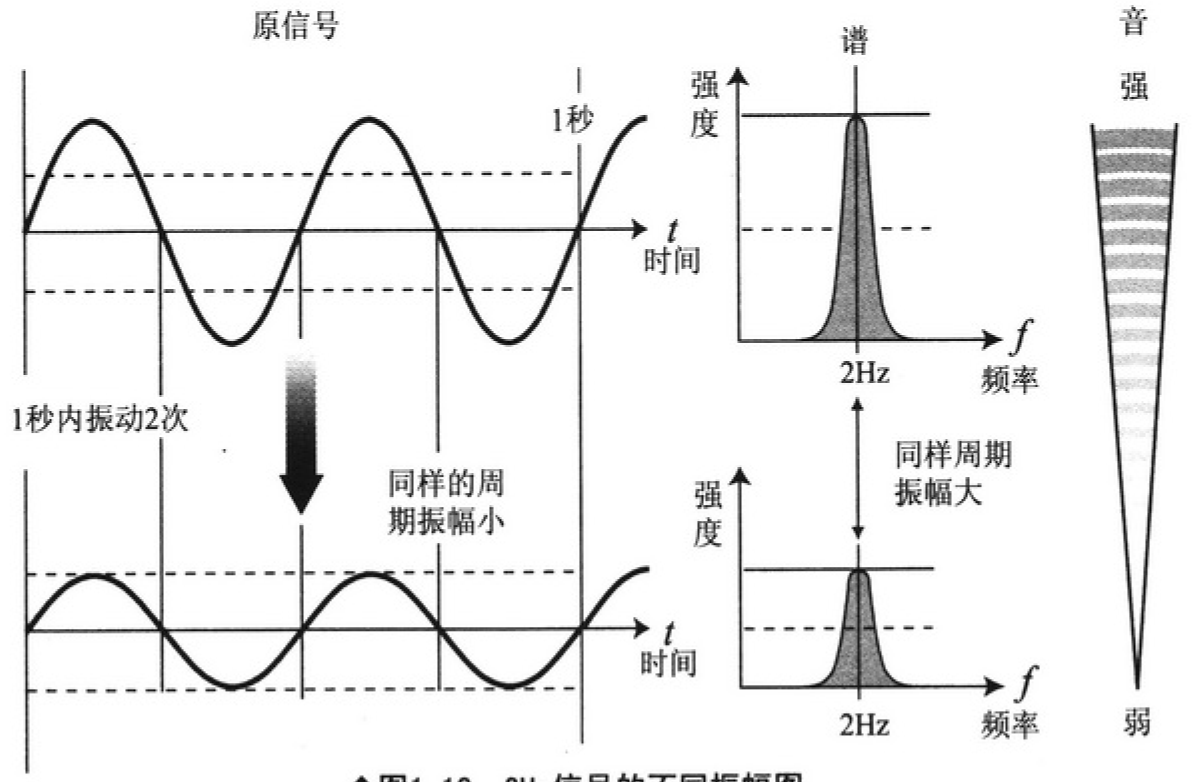
那么，之前 2Hz 的信号转换为频率谱，如图 1.9 所示。



◆图 1.9　2Hz 信号转换为频率谱

横轴的 2Hz 处的振幅能画得更大就好了。

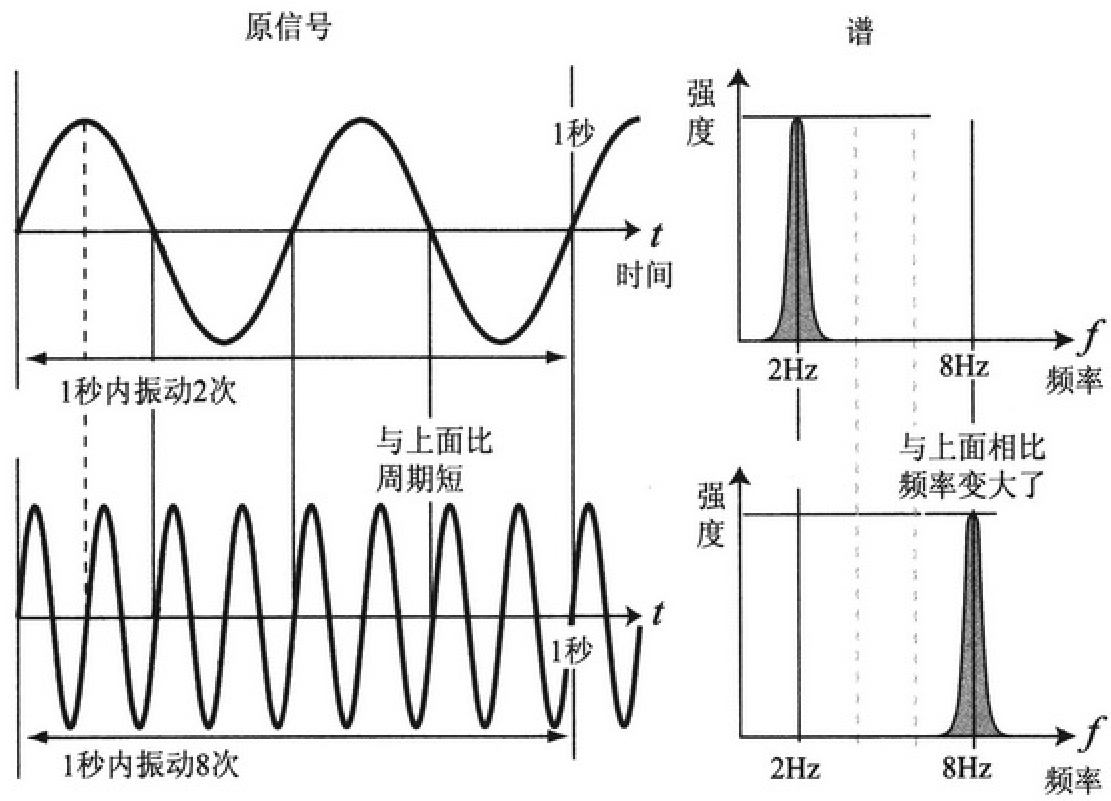
对！说明一下振幅和频率与实际耳朵听到的声音之间的关系。振幅对应着声音的强弱，也就是说，振幅小的话，相应的电视机、收音机的音量也很小，这种关系可以用图 1.10 表示。



◆图1.10　2Hz信号的不同振幅图

频率谱的强度很小的话声音也很弱……是吧？

对！如果频率增加会怎么样呢？假如 1 秒内波振动 8 次，这样，与之前的 2Hz 的波形相比，相同时间内，波来回振动的次数增大 4 倍。用频率谱描述，在 8Hz 处形成峰，像这样增大频率，声音的音调提高，变成高音（图 1.11）。



◆图1.11　2Hz 信号与 8Hz 信号的不同处

那么说，吉他和贝司的弦，细弦比粗弦振动得快，音调也就高！

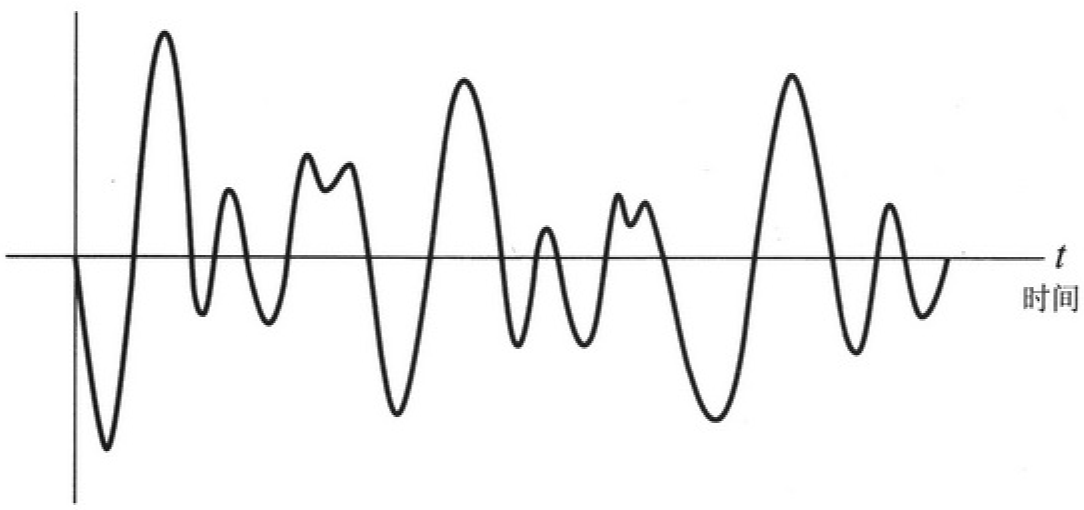
对！而且用力弹，这样弦振动大，声音也就大。从这个方面考虑，弦的振动与信号的波形非常相似，反过来想一下，为了产生低音，有必要慢慢地振动弦，当然，也可以把弦做得粗一点（重一点）。

哦，原来如此！

这样，信号和频率的意义，都在频率谱的图形中体现出来了。不过，实际的声音都是由各种频率的波形混合而成的复杂波形。

从复杂波形中求得频率谱的方法就是傅里叶变换吧？

就是！那么来看一下这个概念吧！例如，有个这样复杂的波形（图1.12）……



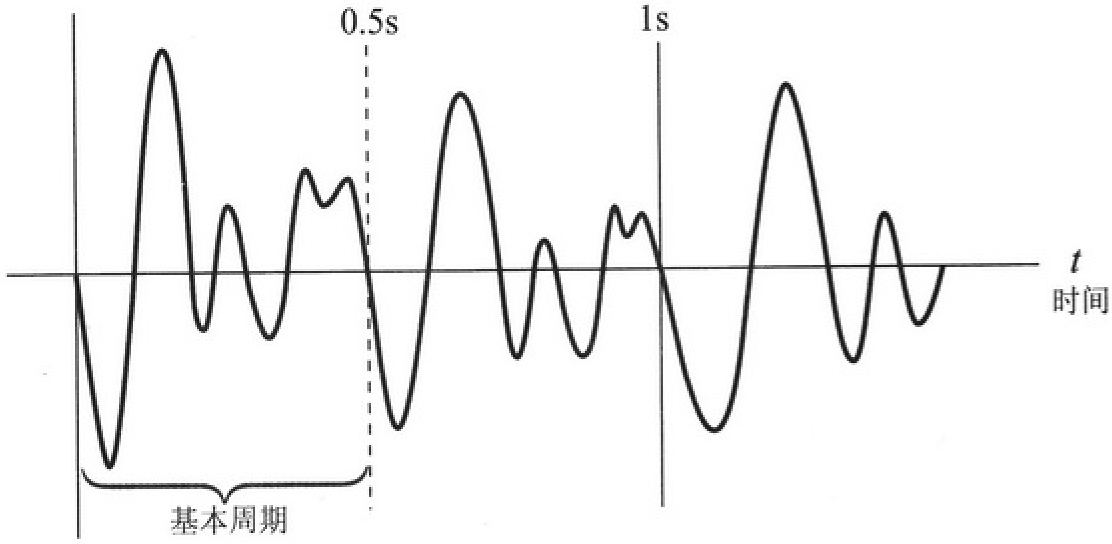
◆图1.12　复杂波形的例子

复杂……

用傅里叶变换，原则上波形须有一定的周期性。在这里，从复杂的波形中取出一个小区间，然后假定这个区间的波形沿着时间轴重复延伸下去，从而得到复杂波形的周期性。

对复杂的波形，要怎么找周期才对呢？

看周期最大的波，它的频率被叫做基本频率。复杂波形中各种频率混在一起，但其中有基本频率。例如，将之前的波形分出 1s 长的区间，在这个区间内寻找最大的波周期，这是基本周期。这个波形中，周期是 0.5s，那么基本周期是 0.5s，基本频率为 2Hz（图 1.13）。



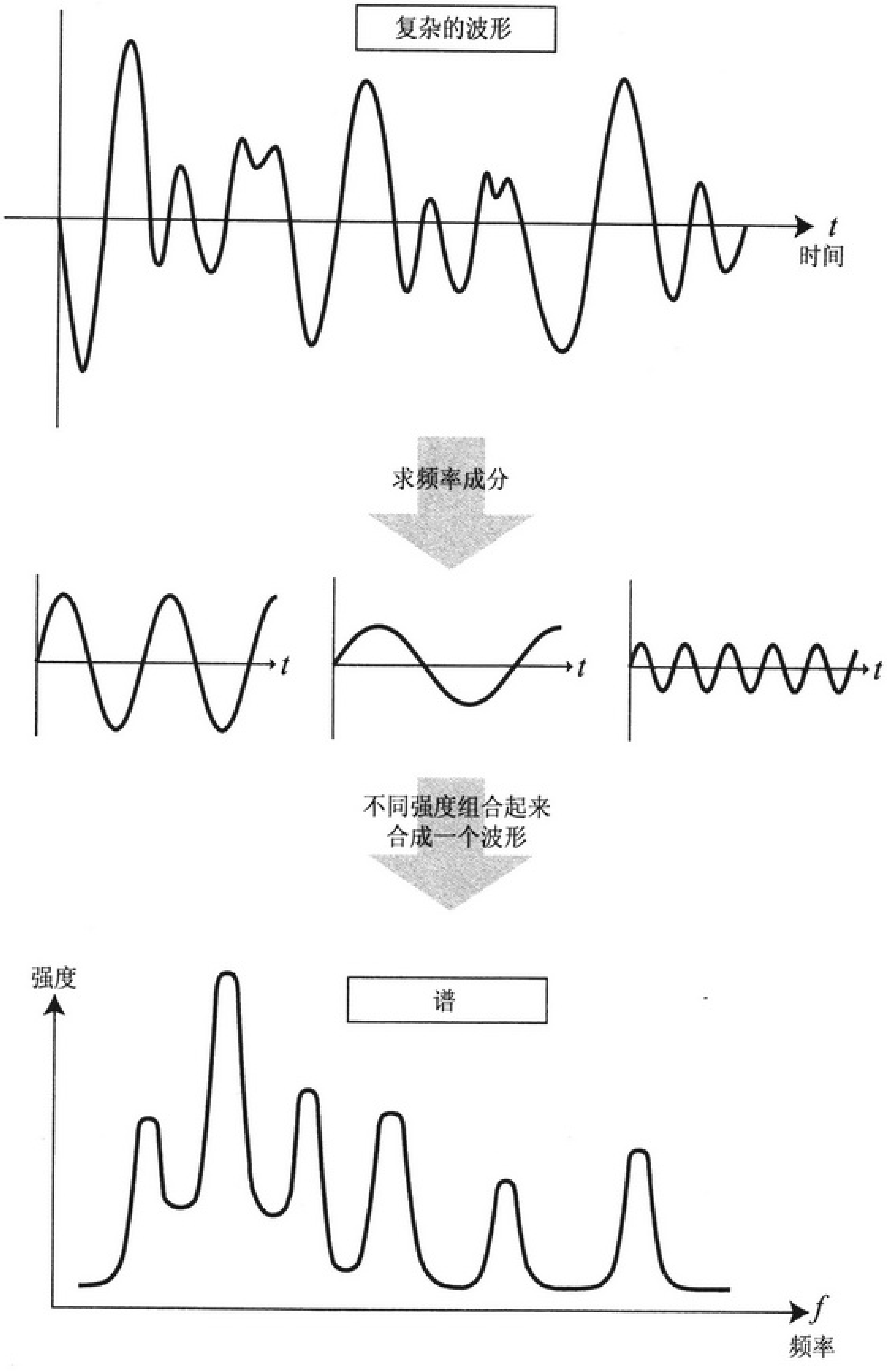
◆图1.13　基本周期

这样啊……然后该怎么办呢？

把复杂波形分出一个小区间，将区间中的一个个简单波形，也就是频率成分抽取出来，这时就需要三角函数和积分的知识了。

哦，之前三角函数出现过，觉得有点关系，还要用到积分啊！

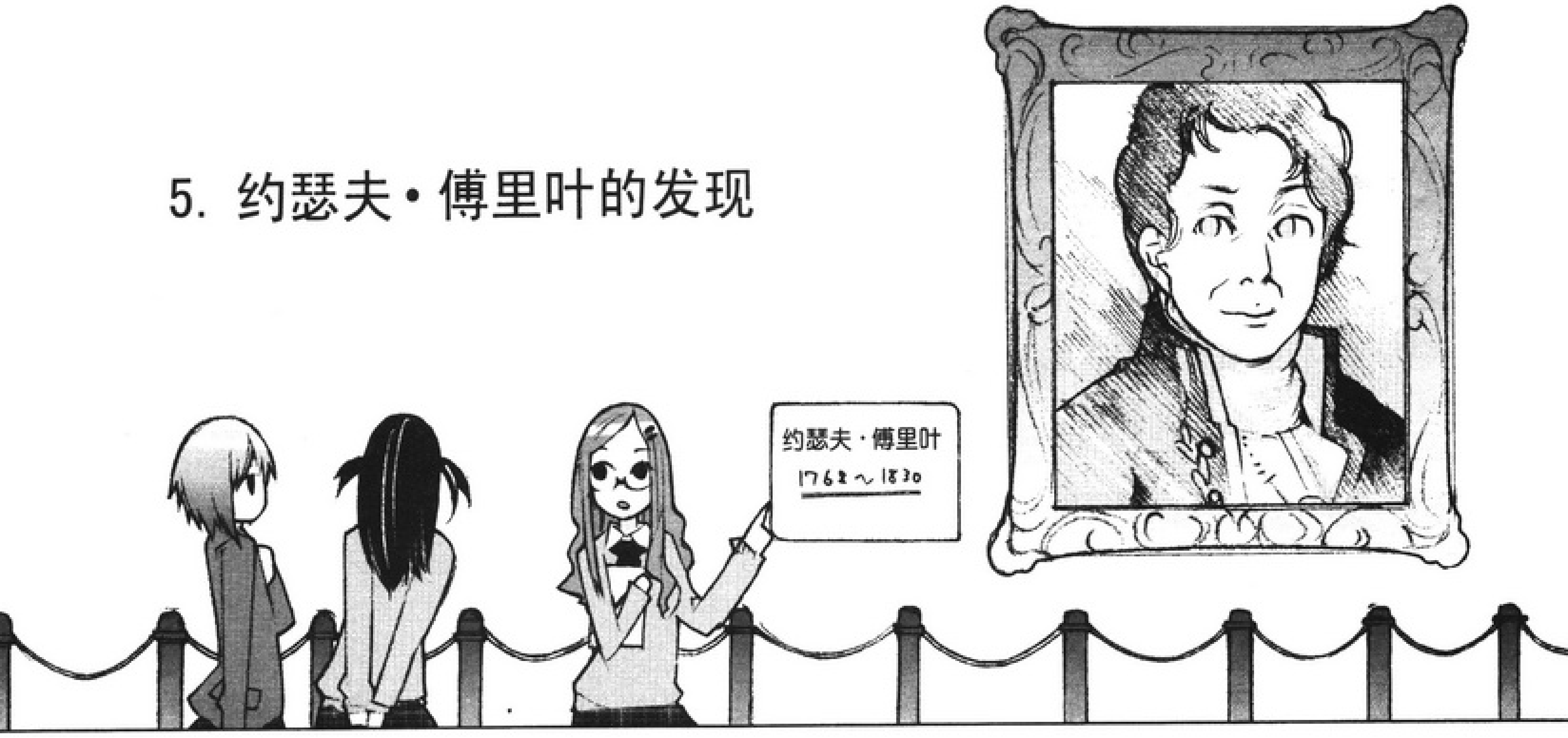
现在不用图像，按顺序回忆也能理解了吧？把频率成分分解出来后，求各自的强度，然后按顺序把这些频率画在以频率为横轴、强度为纵轴的图中，这样就形成了频率谱！这里将傅里叶变化的流程在此整理一下，如图 1.14 所示。



◆图1.14　傅里叶变换图

嗯，嗯！这就是傅里叶变换啊！从傅里叶变换的结果对波形进行分析就是傅里叶解析啊！

5. 约瑟夫·傅里叶的发现



接下来，我们简单回顾一下傅里叶变换的历史吧！

这次是历史课啊！

如果知道布朗运动，而且对此感兴趣，那么对理解傅里叶变换将是很有帮助的。

啊，那就请讲吧！

……（叹息）

傅里叶变换是 1812 年法国数学家约瑟夫·傅里叶（1768 ～ 1830），从研究“热的传导法则”的问题时开始用到的。

傅里叶原来是人的名字啊！热的传导法则与波有什么关系呢？

热的传导是指热量在物体中传递的情况，是受各种因素影响的复杂现象，不过，傅里叶发现：再复杂的现象也是由简单的现象组合在一起而形成的。

这就与复杂的波由简单的波合成的理论联系起来了啊！

实际上，当时傅里叶也没有想到波和频率谱的应用，不过，后来傅里叶的发现随着“研究波的性质的数学方法”的进展而普及开来。

嗯，嗯！

不过，计算大自然中存在的复杂波形实在太麻烦了，这时 1965 年快速傅里叶变换 FFT(Fast Fourier Transform) 方法被提出来了。FFT 是利用三角函数的基本性质的组合，一种高效的傅里叶变换。傅里叶变换随着 FFT 和计算机的普及很快在物理、工学等领域应用开来。

与音乐没有关系，那也没什么作用啊……

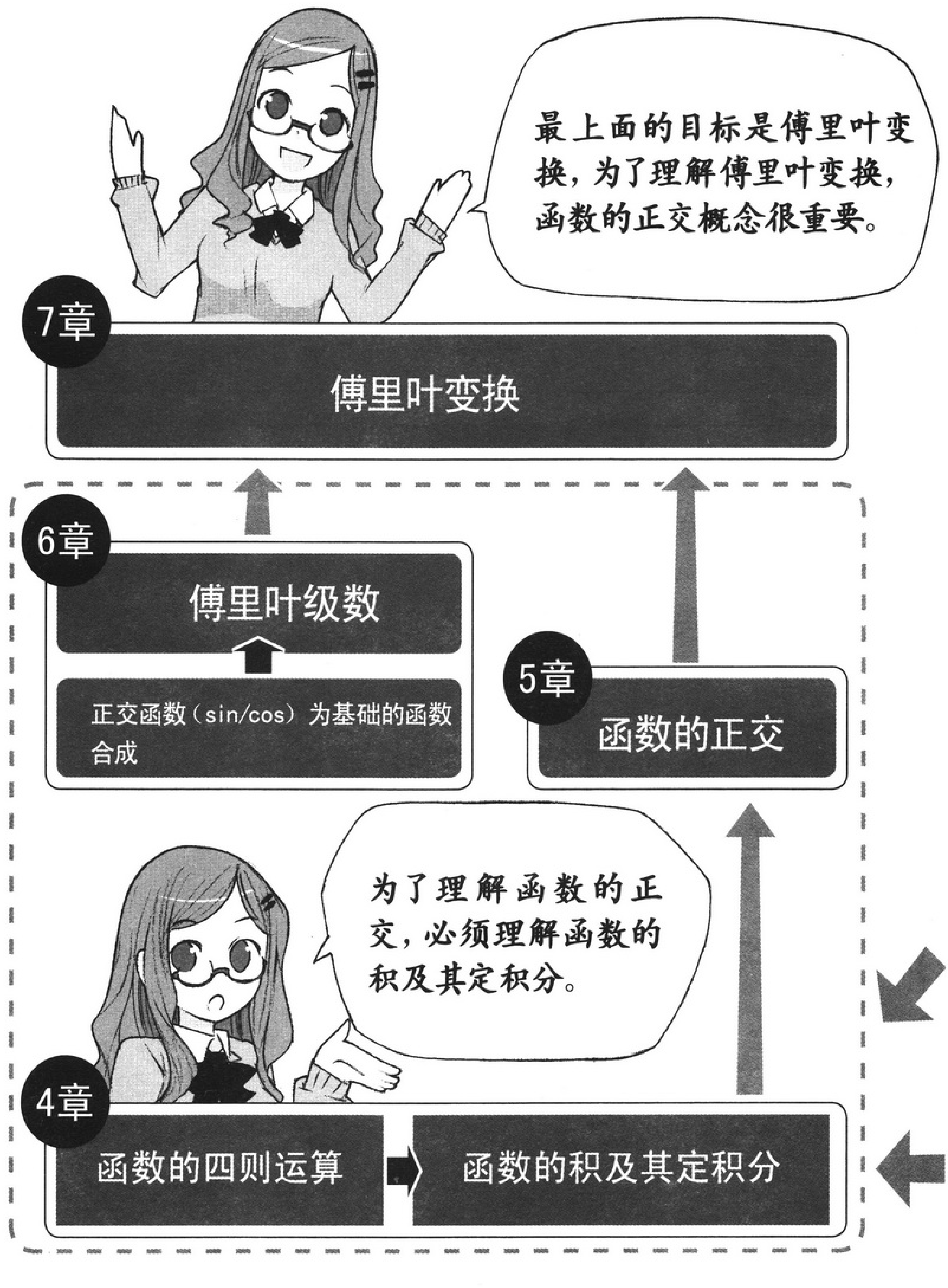
前面讲了光、电波转变为电信号后能被检测出来，那么说，在能检测到信号的许多领域都能应用傅里叶变换！举个简单的例子，医院里面的心电图就是把人的心脏的跳动用清楚的波形表示出来的仪器。

哦，原来如此啊……

这需要从声音信号中分出有用信号和杂音，只传递有用信号，根据心脏跳动的波形判断是正常跳动还是异常跳动。想象一下，酸的味觉信息啊、香甜的嗅觉信息等都能转换为电信号，也就不难理解傅里叶变换的应用范围如此之广泛了。

傅里叶还真是厉害呢！

6. 傅里叶变换的数学准备


最上面的目标是傅里叶变换，为了理解傅里叶变换，函数的正交概念很重要。
7章
傅里叶变换
6章
傅里叶级数
正交函数（sin/cos）为基础的函数合成
5章
函数的正交
为了理解函数的正交，必须理解函数的积及其定积分。
4章
函数的四则运算
函数的积及其定积分

2章

傅里叶变换必要的函数sin和cos=三角函数

3章

函数的切线（倾斜）

积分（原函数）

积分
- 定积分 —— 面积·体积
- 不定积分


哦！
好遥远的道路啊！
加油……
等着瞧吧！
虽然现在还有些听不懂，但是通过努力学习后，肯定会理解的。
主唱呢……
这……这个就交给我吧！
忘了。

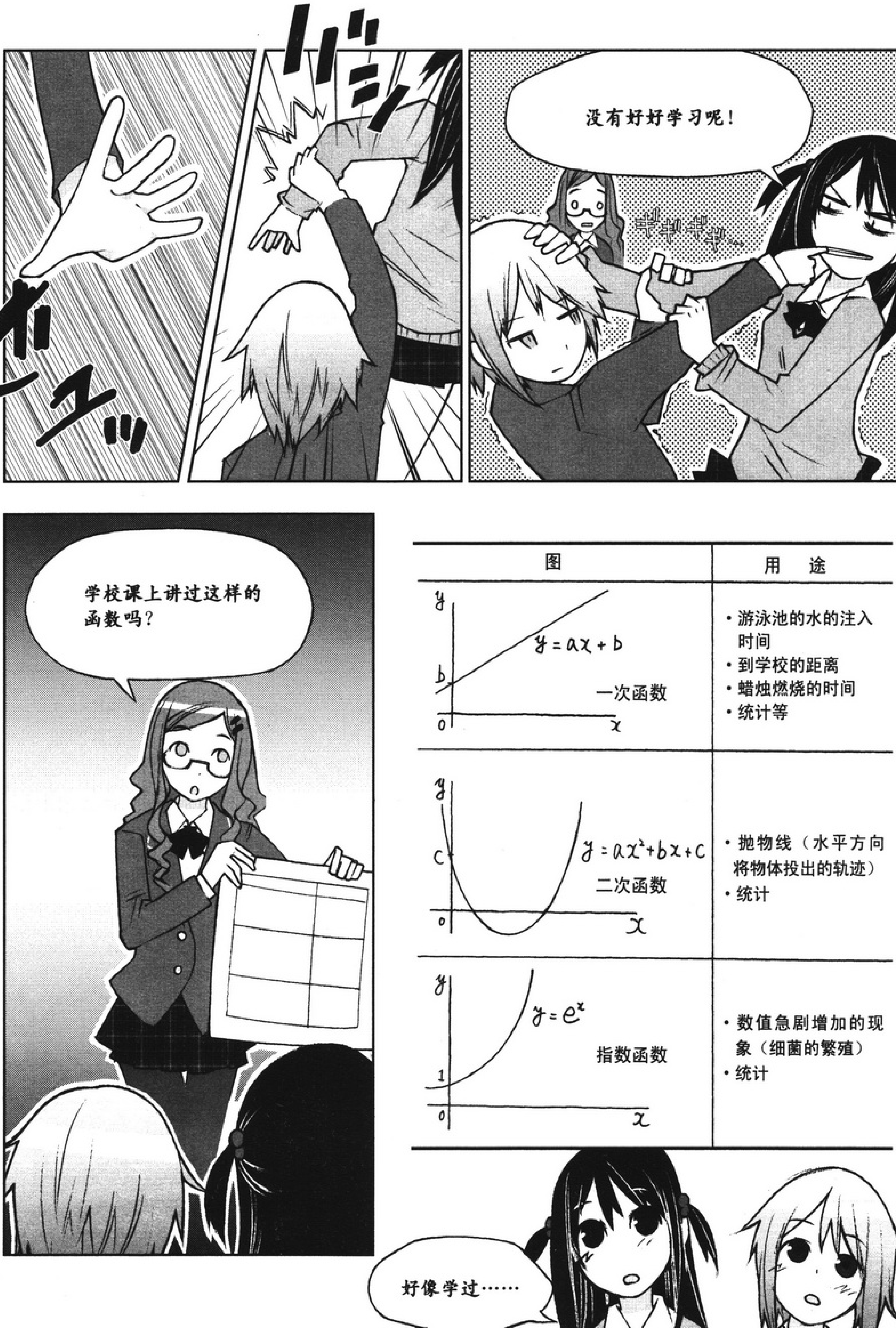
第2章

三角函数

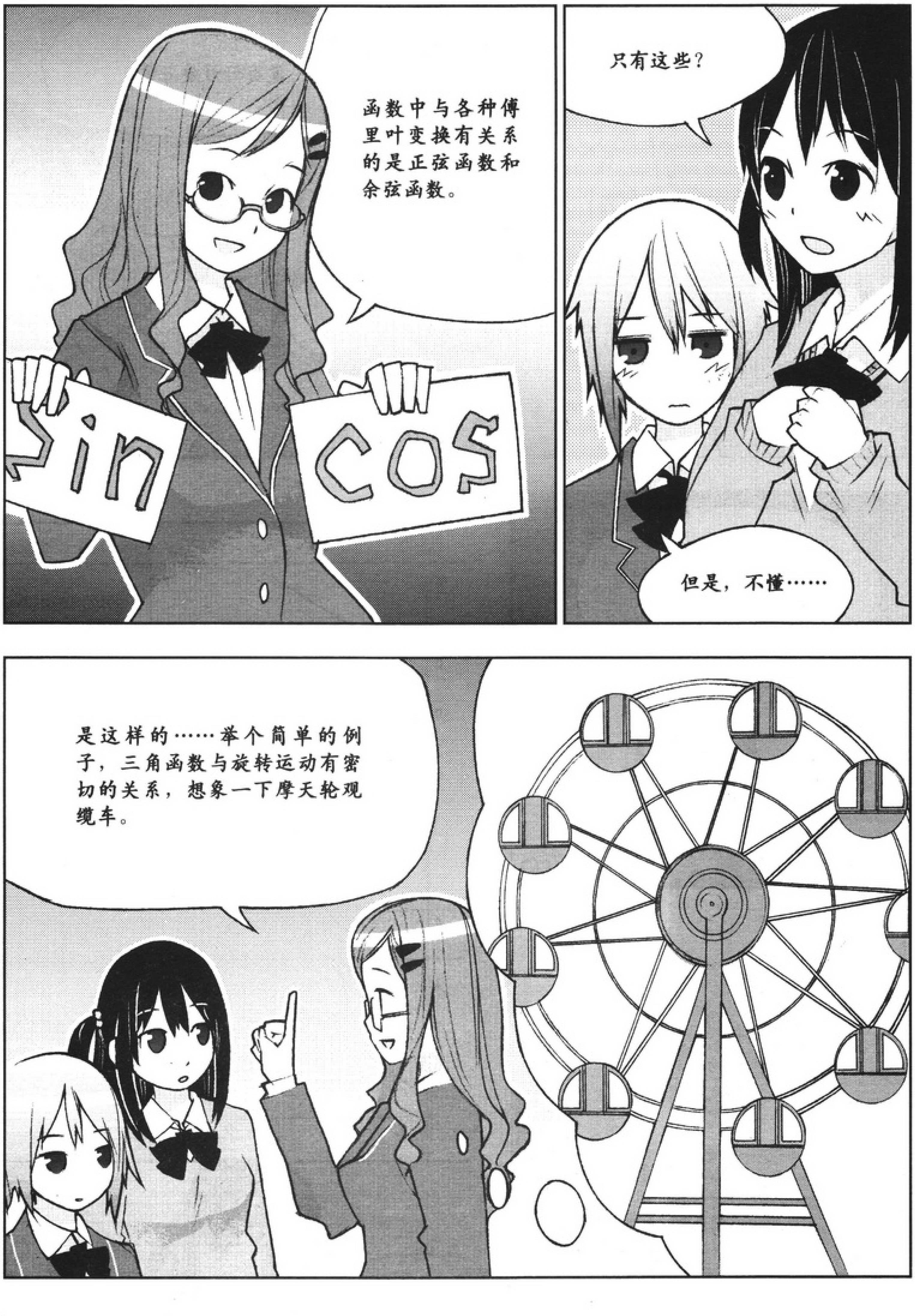
1. 旋转与三角函数

好痛……
什么啊!?
还没有找到主唱吧?
那是什么东西?
好痛……不过没关系，
如果有诚意的话，就找我商量……
谁会那么做啊!
哼
好了，来吧!
就算哭了也没人知道哦!
好了，来吧，来吧，
给我一击，
狠狠的一击吧!
文香!
拜拜!
走吧，铃!
啊，
等等!
打我啊!


どかっ
文香还是那么
冲动呢！
哈？
什么啊！本来就是
那样啊！
不要转移话题，
开始讲课吧！
大家心情都很好呢！
tan
cos
sin
对！
那么，这次讲
三角函数吧！

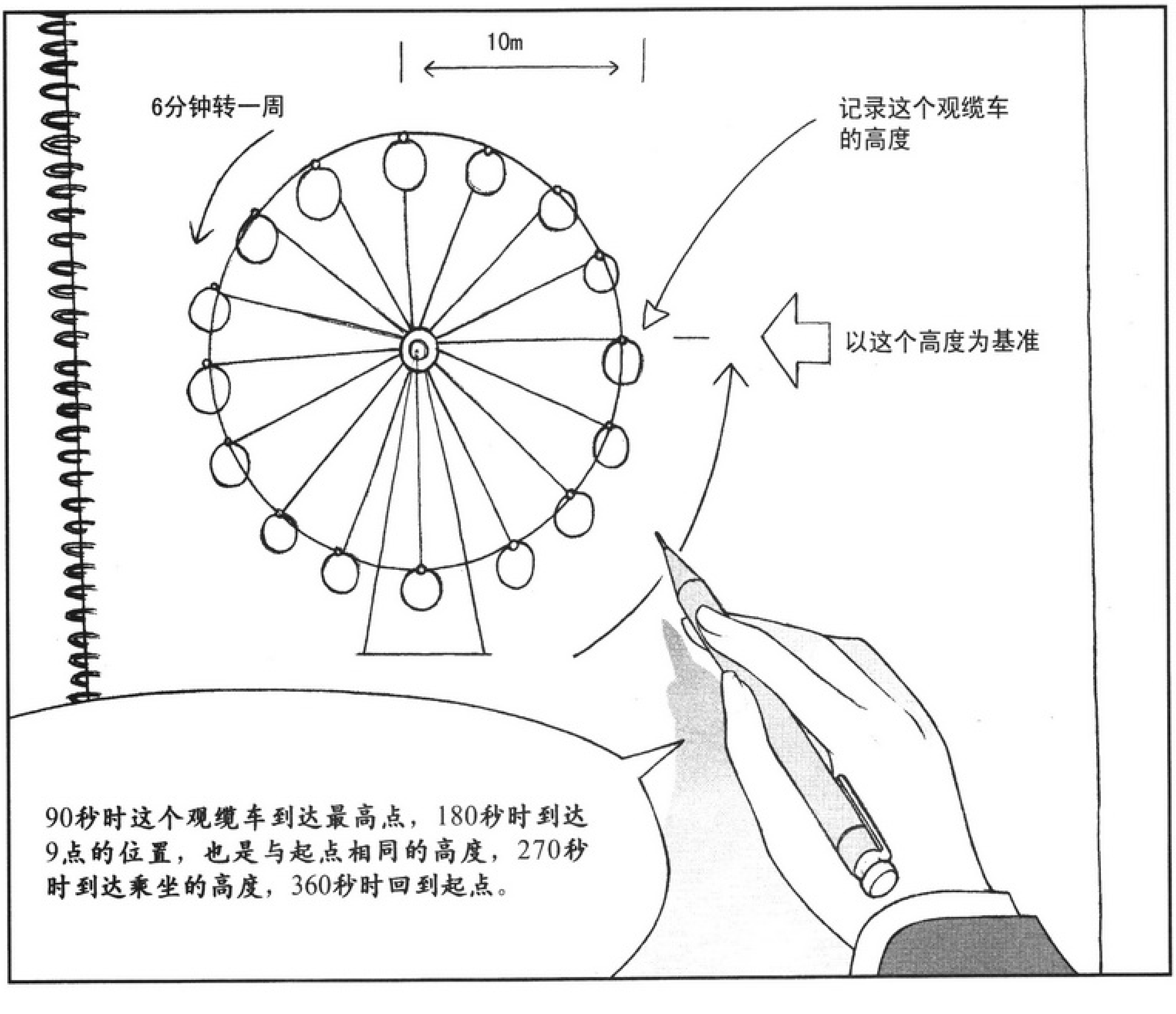


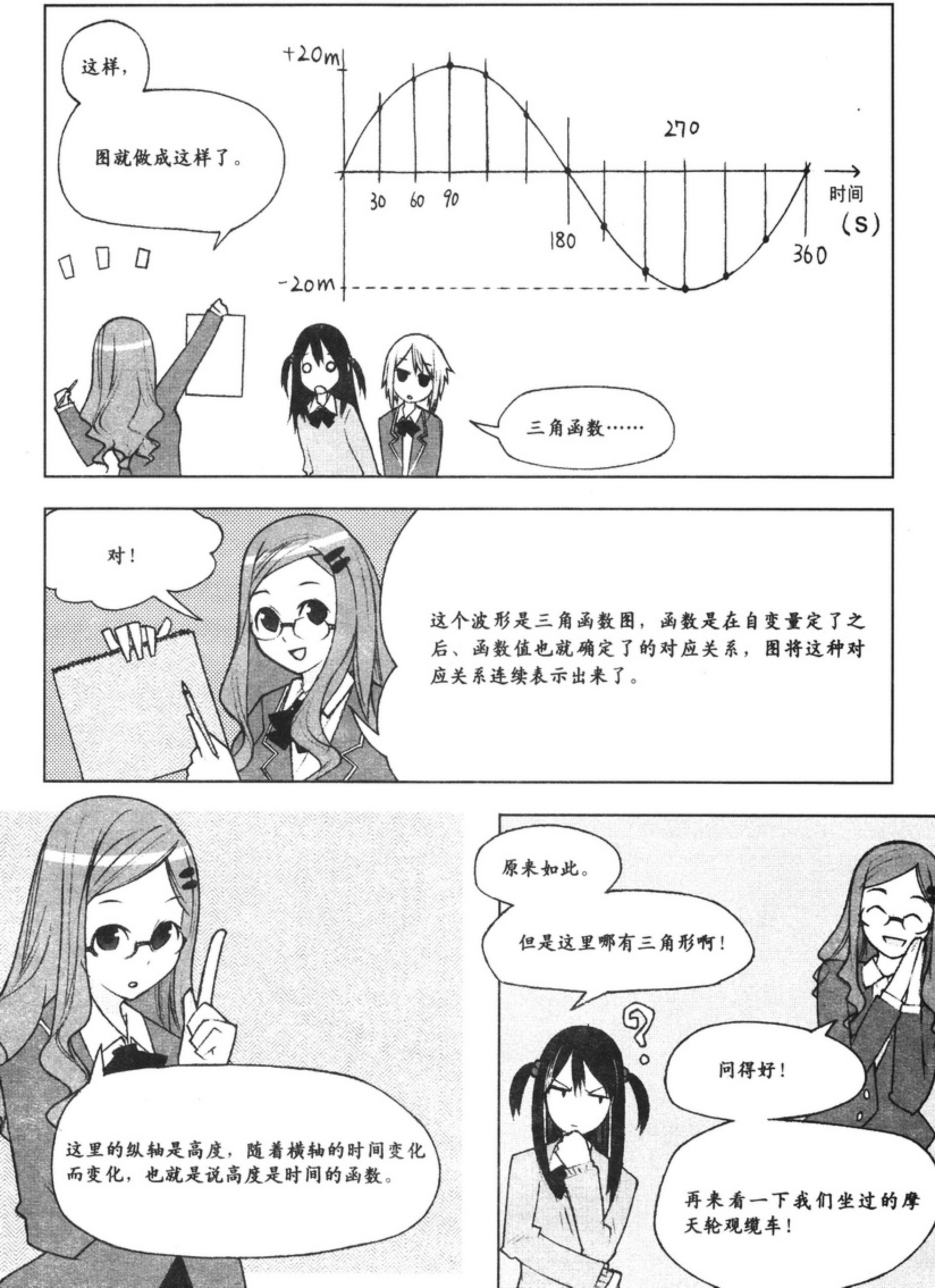
没有好好学习呢！
学校课上讲过这样的函数吗？
图
用 途
$y=ax+b$
一次函数
• 游泳池的水的注入时间
• 到学校的距离
• 蜡烛燃烧的时间
• 统计等
$y=ax^2+bx+c$
二次函数
• 抛物线（水平方向将物体投出的轨迹）
• 统计
$y=e^x$
指数函数
• 数值急剧增加的现象（细菌的繁殖）
• 统计
好像学过……

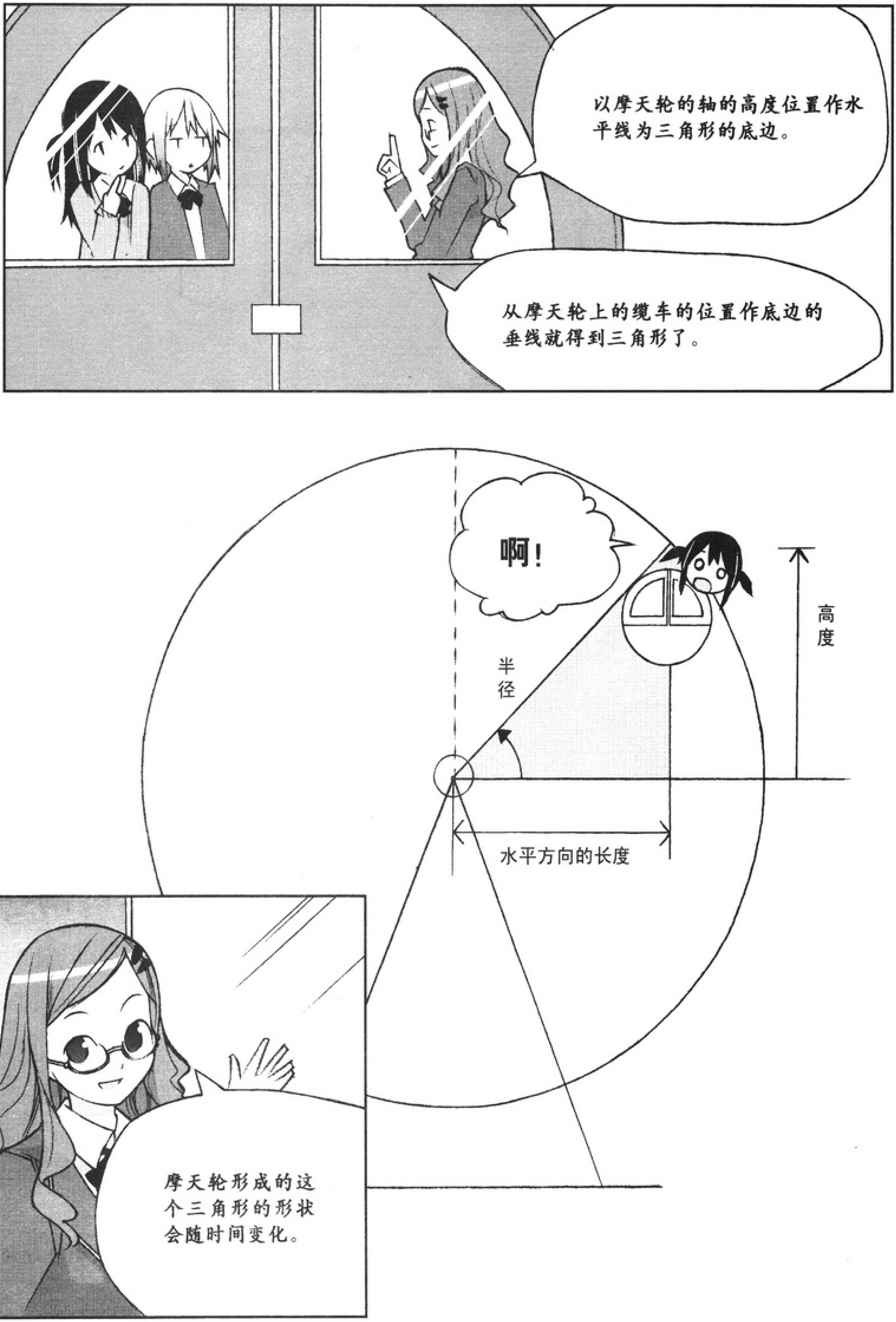

函数中与各种傅里叶变换有关系的是正弦函数和余弦函数。
sin
cos
只有这些？
但是，不懂……
是这样的……举个简单的例子，三角函数与旋转运动有密切的关系，想象一下摩天轮观缆车。


这个摩天轮的直径是
20m，6min转一周。
好可爱的摩天轮！
摩天轮旋转一周360°，30s转
30°（360°÷（6min÷30s）），
1min转60°（30°÷30s）
嗯！
这个摩天轮上的一个观
缆车的高度是怎样随时
间变化的呢？用图形来
表示吧。


我们看摩天轮上从处于时钟3点位置的那个观缆车，开始旋转，每30秒在图上记录这个观缆车的高度。


10m
6分钟转一周
记录这个观缆车的高度
以这个高度为基准
90秒时这个观缆车到达最高点，180秒时到达9点的位置，也是与起点相同的高度，270秒时到达乘坐的高度，360秒时回到起点。


这样，
图就做成这样了。
+20m
-20m
30
60
90
180
270
360
时间
(S)
三角函数……
对！
这个波形是三角函数图，函数是在自变量定了之后、函数值也就确定了的对应关系，图将这种对应关系连续表示出来了。
这里的纵轴是高度，随着横轴的时间变化而变化，也就是说高度是时间的函数。
原来如此。
但是这里哪有三角形啊！
问得好！
再来看一下我们坐过的摩天轮观缆车！


以摩天轮的轴的高度位置作水平线为三角形的底边。
从摩天轮上的缆车的位置作底边的垂线就得到三角形了。
啊！
高度
半径
水平方向的长度
摩天轮形成的这个三角形的形状会随时间变化。


原来如此啊！
像这样！
三角函数的概念并不局限于三角形这个词语……
也请记住，它与旋转运动、圆都有密切联系。
好！
真像在上课了！

2. 单位圆

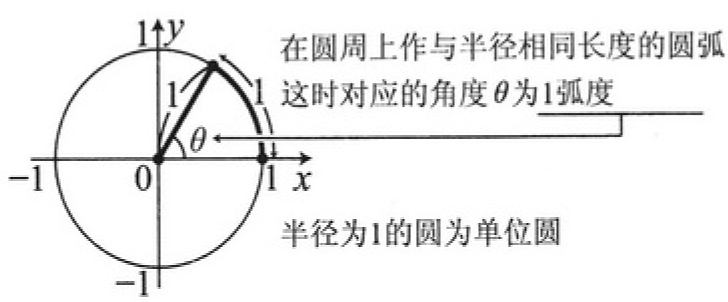
角度、长度等在数学中使用的一些概念，今后也会经常用到，为了便于讲解，现在先解释一下。

好！

在上一个例子里，假设了一个直径为 20m 的摩天轮，在数学运算中，长度的单位“米”并不是很重要。还有，摩天轮的半径和圆的直径等，为使用简单，设基准＝1，在实际应用中，可以转换成长度、电压之类的物理量。总之，现在都是以 1 为基准，像这样，半径为 1 的圆叫做单位圆。

半径是 1，很简单呢！容易理解就好！

为了便于数学上的运算，设以半径为 1 的圆的中心为原点，向右水平作 x 轴，向上垂直作 y 轴，这里，轴是基准线。而且以此基准也可测量角度。这里面的单位圆的半径为 1，是长度，在圆周上取与半径相同长度的圆弧，对应的角度为 1 弧度（图 2.1）。



◆图2.1　单位圆中的弧度概念

弧度，有什么用？

在三角函数运算中，弧度这个单位能大大的简化运算，而且，在半径为 1 的单位圆中，角度与圆周长有密切的关系，用弧度可以很容易画出计算的图形。

哦，那 θ 是什么？

请记住 θ 是表示角度的符号。

像 x，y 那样的符号吧！

嗯，还记得求圆周长的公式吗？

……$2\pi r$？

对！π 是圆周率，r 是半径。也可以这么说，圆周率 π 是圆周长与直径（$2r$）之比。单位圆的半径为 1，直径为 2，那么圆周长就是 2π。以观缆车为例，圆周是一个缆车旋转 360 度的轨迹的长度。让我们用弧度来衡量吧。

圆周上长度 1 的圆弧对应的角度是 1 弧度。

对！圆周长是 2π，用弧度表示就是 2π 弧度。之前用度（还有分、秒）表示角度，将角度化为弧度有这样的运算 360 度＝ 2π，也就是圆弧长度对应的角度表示方法是弧度。而且，角度与弧度对应关系如下表（表 2.1）。

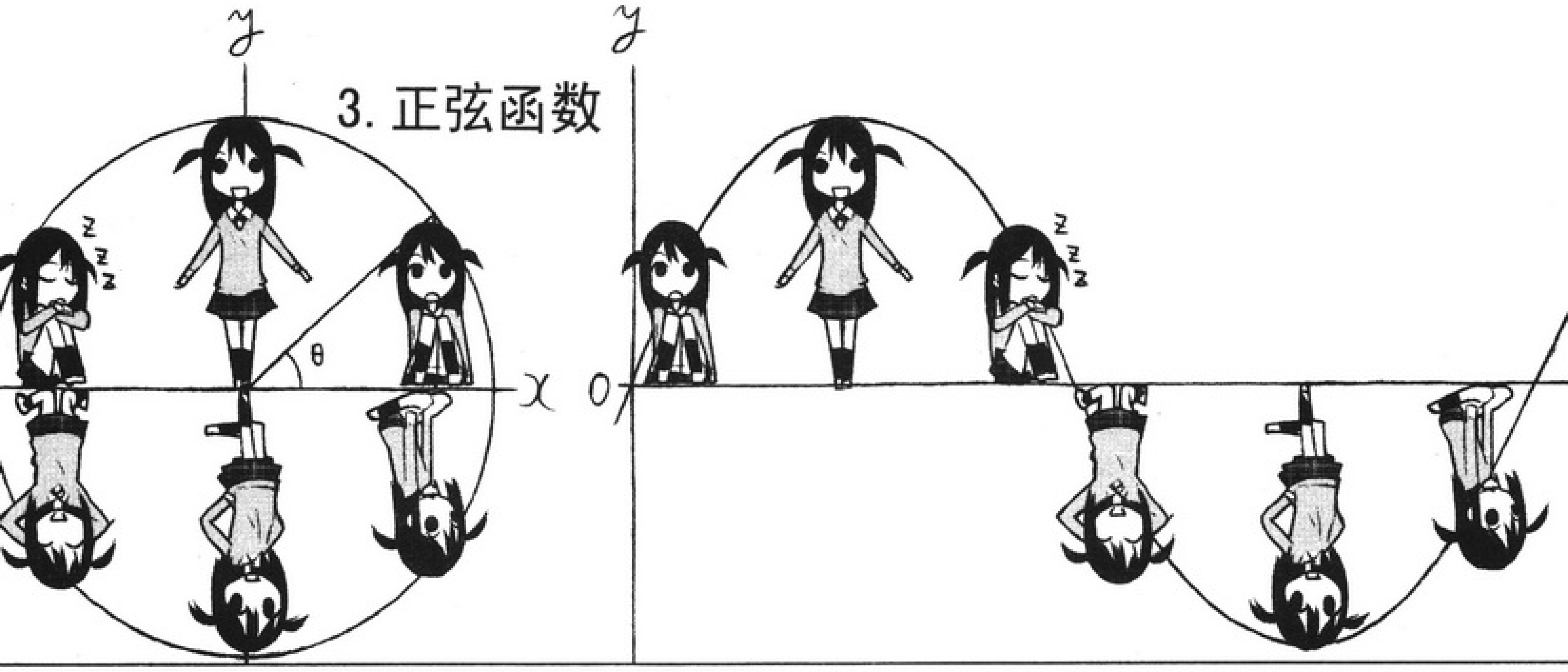
◆表2.1　角度与弧度的对应关系

弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
角度/°	30	45	60	90	180	360

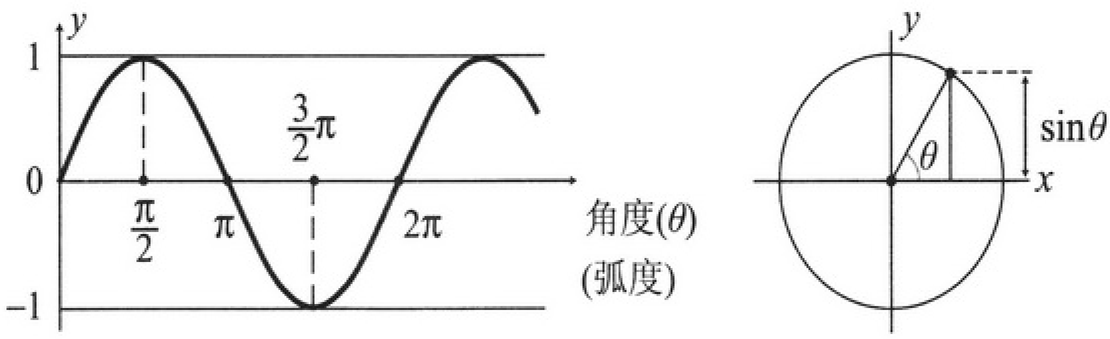
像切蛋糕时候的感觉呢……

对啊！将圆形蛋糕分成几等份时，把圆周——也就是蛋糕的圆周长大概平均的分开，类似这样的感觉，一般都是熟悉的大小弧度，但用到函数时就变得像有标准了。

3. 正弦函数



首先请看这个图（图2.2）。



◆图2.2　正弦函数的概念

请回忆一下之前讲过的观缆车的例子，缆车的位置，也就是圆周上做旋转运动的某一点的高度的变化记录到图形中，与图 2.2 是相同的形状。

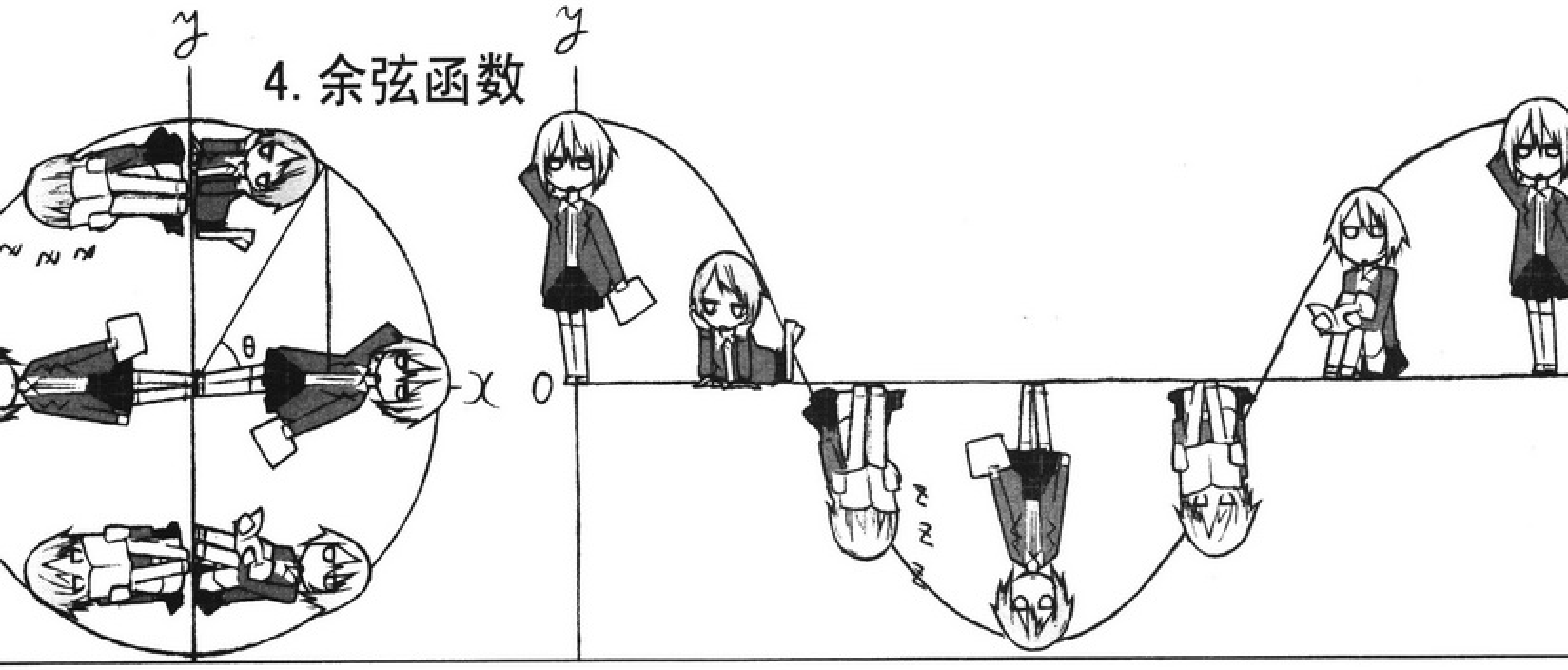
嗯嗯，就是就是，三角函数啊！

这个图形是正弦函数也叫 sin 函数。再来明确一下函数这个词的含义。看这个图形，横轴表示角度，纵轴表示单位圆上某一点离 x 轴的高度。也就是，纵轴值 y 是横轴（角度）值 x 的函数。

sin 是表示三角形的高啊……

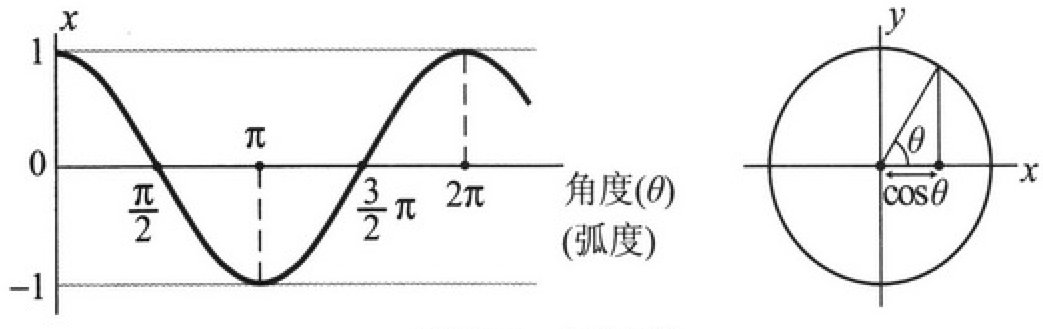
对。与旋转运动联系起来，上个图表示从 $\theta=0$（旋转运动刚好在 x 轴）开始运动的是正弦函数。以 x 轴为基准，旋转的任意角度（也可叫做底角）的大小用 θ 表示，与高度 y 的关系用 $y=\sin\theta$ 表示。

4. 余弦函数



sin θ 表示的是单位圆上某一点的高度，也就是对应的 y 的值，而相应的 x 值的变化就变成了 cos θ。

首先 $\theta=0$ 时，单位圆中这个点对应的 x 轴的投影的长度与半径相等，随着 θ 慢慢增大，点在 x 轴上的投影位置到圆心的长度等于 cosθ。用图形表示就变成这样了（图 2.3）。

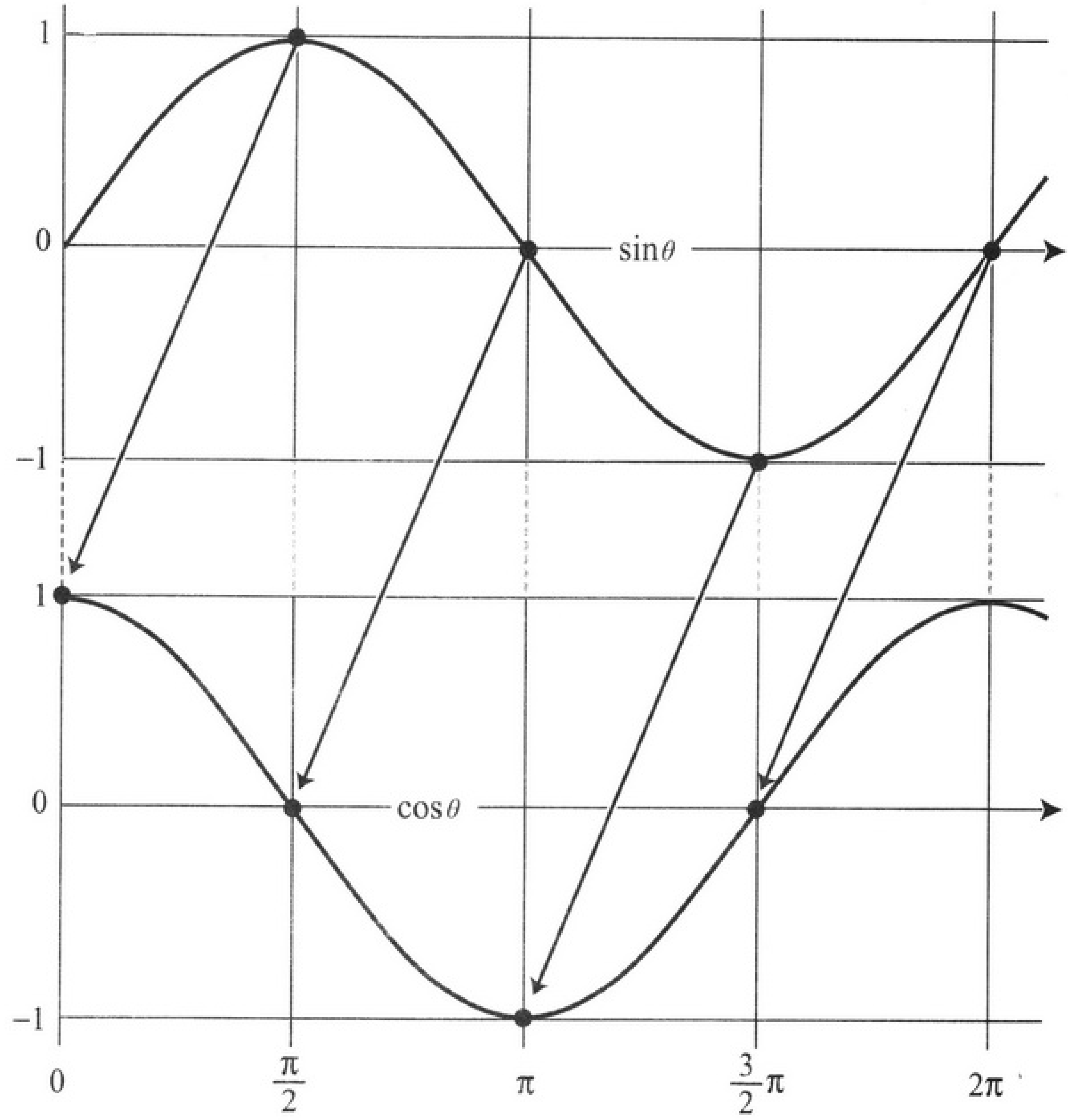


◆图2.3　余弦函数

这个可以用 $x=\cos\theta$ 式子来表示。 sinθ 表示的是旋转运动的点在 y 轴上的投影高度，相对应的用 cosθ 表示在 x 轴上的投影长度，就有了 $x=\cos\theta$。这个函数叫做余弦函数也叫 cos 函数。

与 sin 的图形相似……

对！实际上正弦函数、余弦函数都具有相同的基本形状，为了比较，把 sinθ 与 cosθ 两个图形放在一起看一下吧（图 2.4）！



◆图 2.4　sinθ 与 cosθ

啊！真的一样！

你还怀疑过吗？

cosθ 只是比 sinθ 延迟了 $\frac{\pi}{2}$，这样就容易理解它们是相同的图形了。 sin 和 cos 分别对应单位圆中 y 轴投影和 x 轴投影长度，将二者都水平移动$\frac{\pi}{2}$， sin 图形变得与 cos 图形相同，cos 图形变得与 sin 图形相同，可以理解二者是等价的状态。

5. 参数表示与圆的表达式

当点在单位圆圆周上移动时，圆周上所有点的底角用 θ 表示，有 $x = \cos\theta$、 $y = \sin\theta$，这种表示方法里， θ 作为变量叫做参数，这也是三角函数应用的重要部分。

参数……？

也就是，随 θ 变化的 $x = \cos\theta$ 和 $y = \sin\theta$ 中，某一点 θ 确定后， x 和 y 也确定了， θ 便是参数。

现在，θ 确定一个值，根据 $x = \cos\theta$ 和 $y = \sin\theta$ 计算得到一组（x，y），在 x-y 平面上可以确定一个点坐标。此处，随着 θ 变化，相应的会产生许多不同的（x，y）组，那么说，将所有的 θ 的值都计算出来，得到点（x，y）的集合可以表示为圆的函数（表示圆周上所有的点）。

在初中的数学知识里，函数写为 $y =$……，只有一个式子，而这里的函数表达式有两个（都含有 θ）。

这个也能形成圆啊……

嗯，还记得圆的表达式吗？

嗯……记得教材上教过，但记得不太清了。

想起来了吧，是 $x^2+y^2=r^2$！

就是那样的。

圆是到某一个点的距离为定值的点的集合，这些都符合圆的表达式。

……这是怎么回事呢？

把先前的参数代入圆的表达式中，这里采用的是半径 r 为 1 的单位圆，将 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ 和 $r=1$ 都代入圆的表达式……

圆的表达式 $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \cos^2\theta+\sin^2\theta=1^2$，这是重要的表达式。

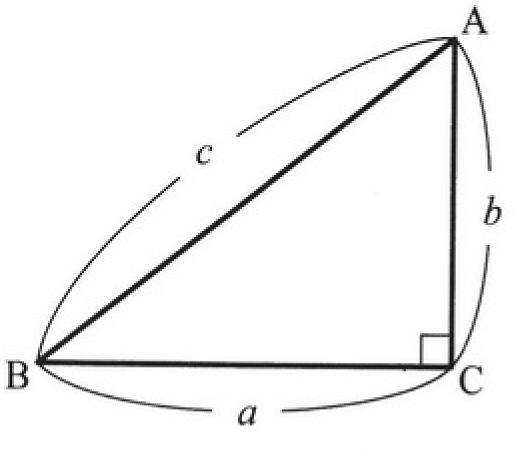
在这里 $(\sin\theta)^2$ 用 $\sin^2\theta$ 表示，$(\cos\theta)^2$ 用 $\cos^2\theta$ 表示。

这是什么？

也就是说，根据勾股定理就可以得出来。

哦？勾股定理是怎么回事？

毕达哥拉斯的三角平方定理，直角三角形的三条边的长度用 a、b、c 表示，$\angle C=90$ 度，有这样的关系：$a^2+b^2=c^2$。



$$a^2+b^2=c^2$$

数学真是不可思议呢！

这就是数学的魅力啊！用参数表示有 $x=\cos\theta$ 和 $y=\sin\theta$。 $\cos\theta$ 表示直角三角形底边长度， $\sin\theta$ 表示高的长度（回忆一下观缆车的例子）。这样，之前计算得到的 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1^2$ 实际上与 $a^2+b^2=c^2$ 是同样的定理。

啊……这样啊。

用这个定理和参数表示来研究圆周上点的旋转运动，可以得出三角形的比率的概念。

这么说的话，上课的时候讲三角函数，首先要教三角形的比率啊……

你真的好好地听课了吗？

……瞒着老师在学音乐。

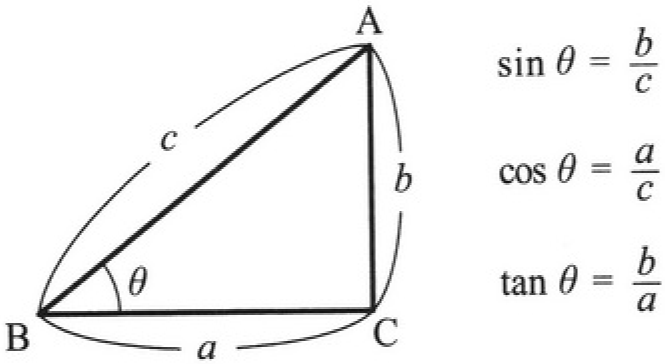
不好意思……

呵呵……确实教科书上关于三角函数的解释有，在静止的时候（也就是说旋转运动某一时刻的状态），直角三角形的斜边 c，底边 a，高 b 还有底角 θ 的关系有这样的定义：

θ 的正弦（sin）：$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$ ， θ 的余弦（cos）：$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$ ，

θ 的正切（tan）：$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$

以上是用角度表示边的比率，介绍了三角函数的定义（图2.5）。



◆图2.5　三角函数的定义

对对……就是这个！

在单位圆中，半径 r 可以用上面三角形的斜边 c 来代替，也就是说 $c=1$，由上面的定义可以得到：高 $\sin\theta=b$，底边 $\cos\theta=a$。

记住了 θ 随时间变化，就很容易理解声波与随时间变化的物理量的关系了。

嗯！

6. 随时间变化的三角函数的物理量的研究

学习三角函数时，其中的变量 θ 表示的是角度，不像长度的单位为米（m）、时间的单位为秒（s）、重量的单位为千克（kg），角度在这里没有单位，也就是说三角函数的 θ 没有物理单位。

啊？没有物理单位，这是怎么回事？

傅里叶变化是研究随时间变化的物理量，没有物理量单位确实很不方便，但是，此时会给 θ 加上物理量单位。

哦。原来是这样啊！

然而，傅里叶变换在处理随时间变化的物理量时，没有单位的话会很不方便。因此我们给变量 θ 加上物理单位。

像“5 片”这样的不行吗？

如果不好好的加上正确的物理量的单位，而只是加上一个字是不行的。如果想给角度变量 θ 带上物理单位，必须随着研究对象变化而变化。用具体的例子来说，像“每秒多少弧度的旋转运动”这样的研究对象中，给 θ 加上单位就可以。

啊，如果知道了旋转运动的速度，那也自然知道旋转的角度 θ 了。变量 θ 没有物理单位，在“每秒多少弧度的旋转运动”中就有单位了？

是的。将这个带有单位的变量用文字表述，就是物理学、电子学中用到的 ω。这个物理量 ω 叫做角速度。一般的速度的单位都是米 / 秒（m/s），而角速度的单位则是弧度 / 秒（rad/s），而且角速度也可以用快慢来形容。

那么说，在观缆车旋转运动中，旋转一周 6min （360s）（360° = 2π），那么，角速度就是 $\frac{\pi}{180}$ rad/s 了？

对！看来你已经理解了物理单位这个知识点了。在其他研究对象中，角度随时间变化的快慢是旋转运动的圆周上的点的运动速度，都可以作为“每秒多少弧度的旋转运动”来研究。在这些研究对象中， ω 叫做角频率，角频率与频率有很大的联系。

噢！频率出现了！

总结一下， ω（rad/s）乘以 t（s）得到物理量是角度，这样就能利用三角函数的变量了。像这样，时间变化量（如 x、y）就可以直接采用角度的单位 rad 了。

这个单位，那个单位，好难懂的东西啊！

……

我想到了新的单位 [Rin]!

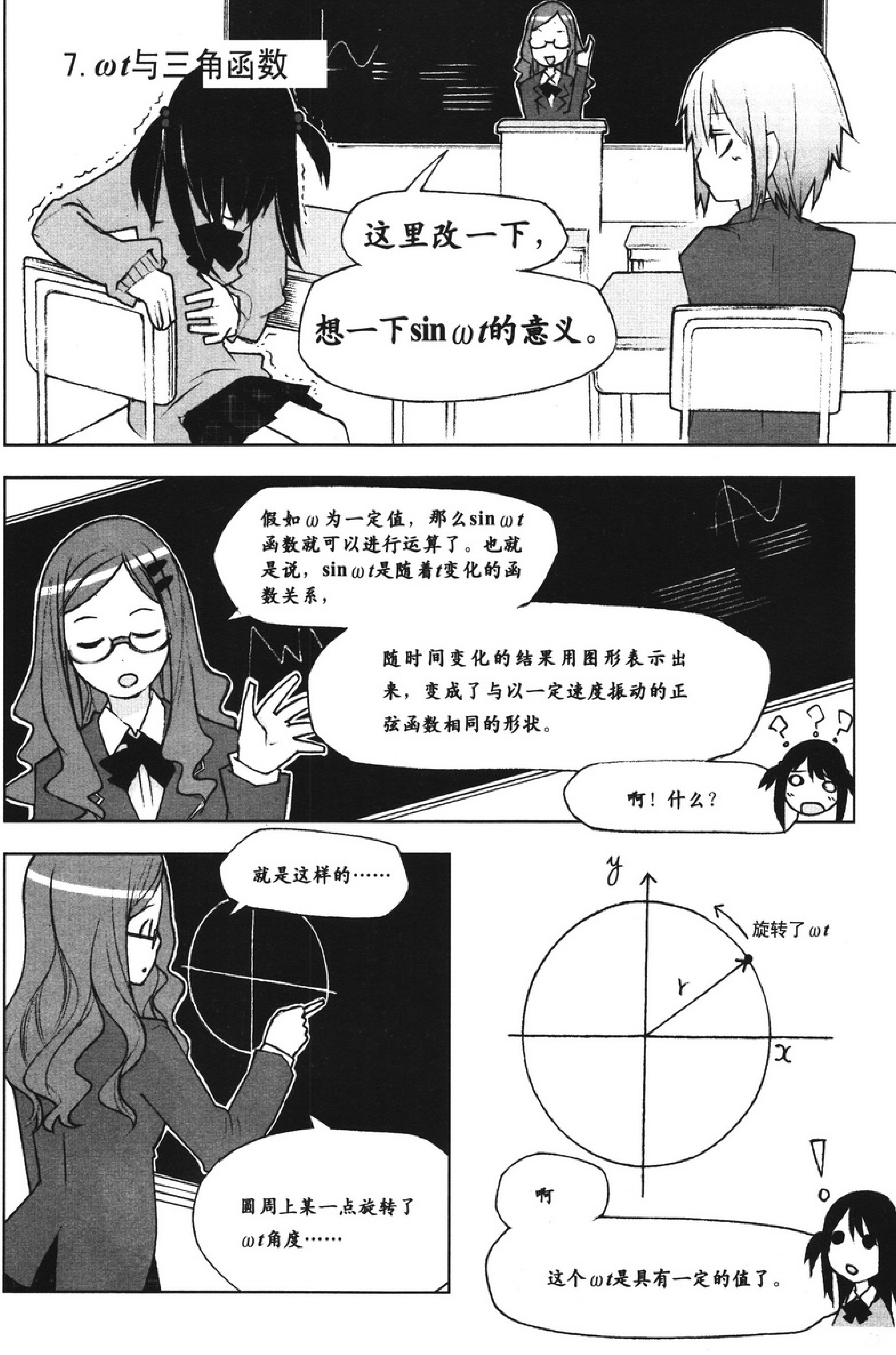
啊，那是什么呀……？

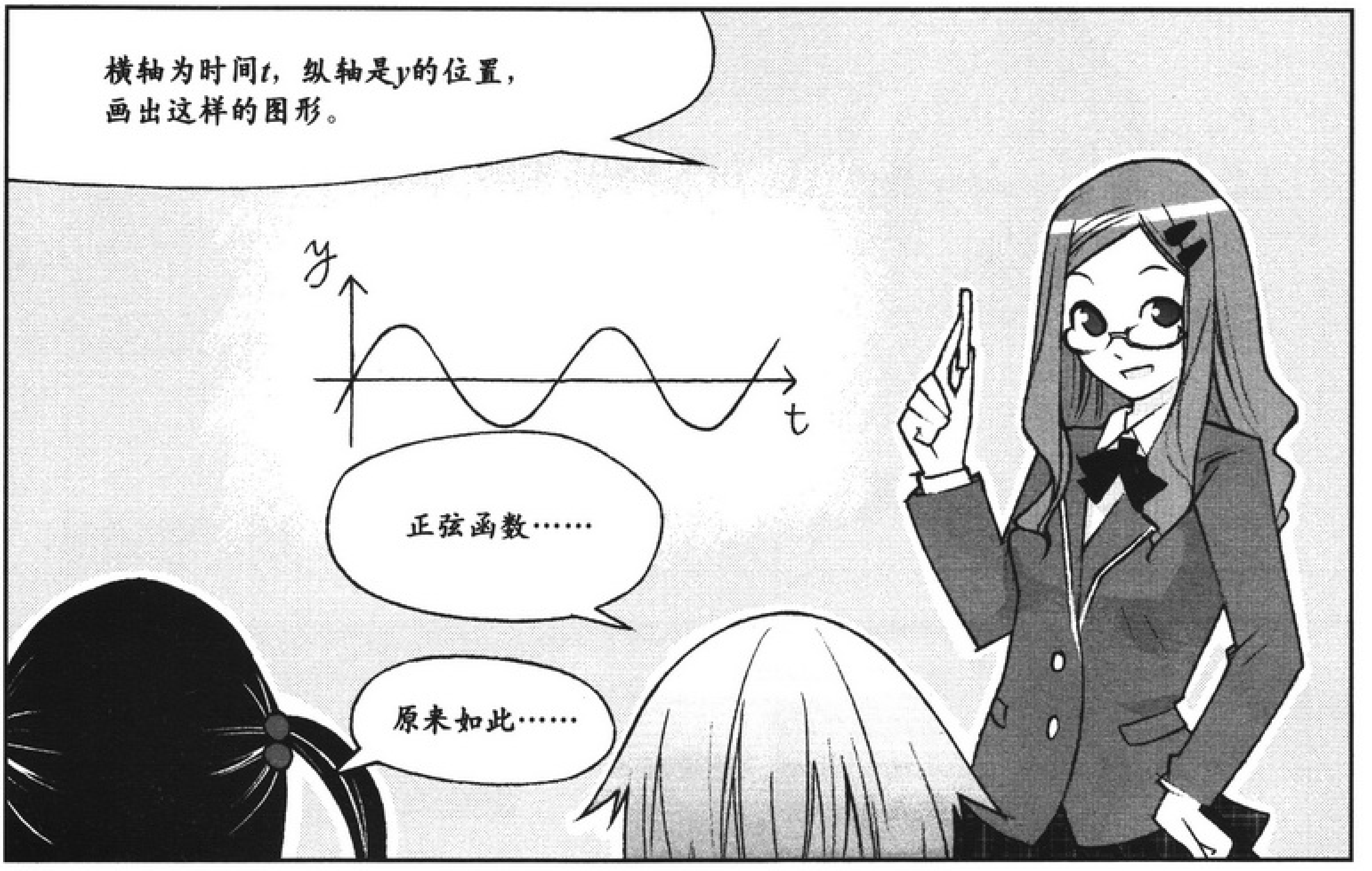
表示沉默的单位！今天铃差不多是 92Rin 吧？

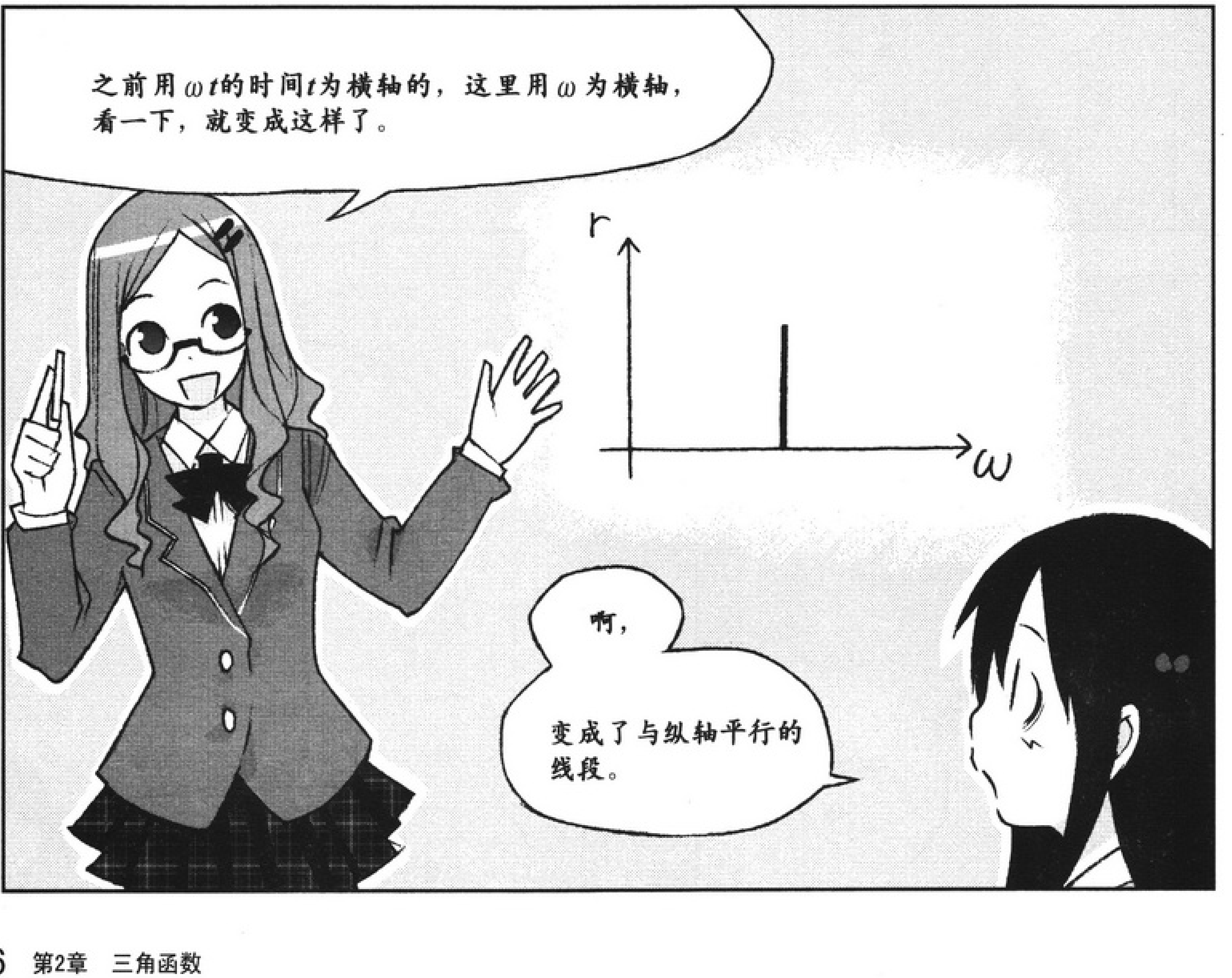
……啪！（打文香的声音）

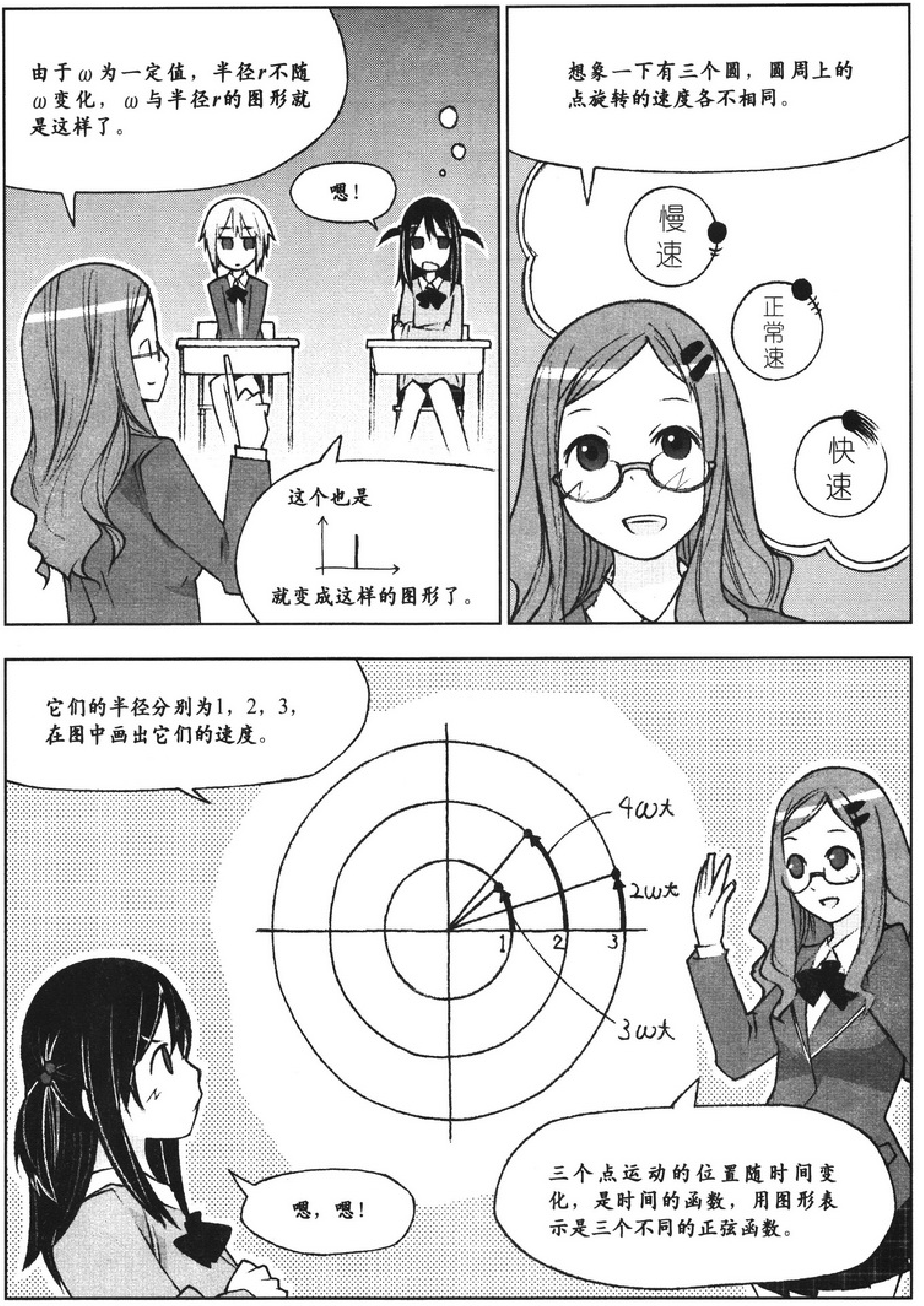
呜呜！

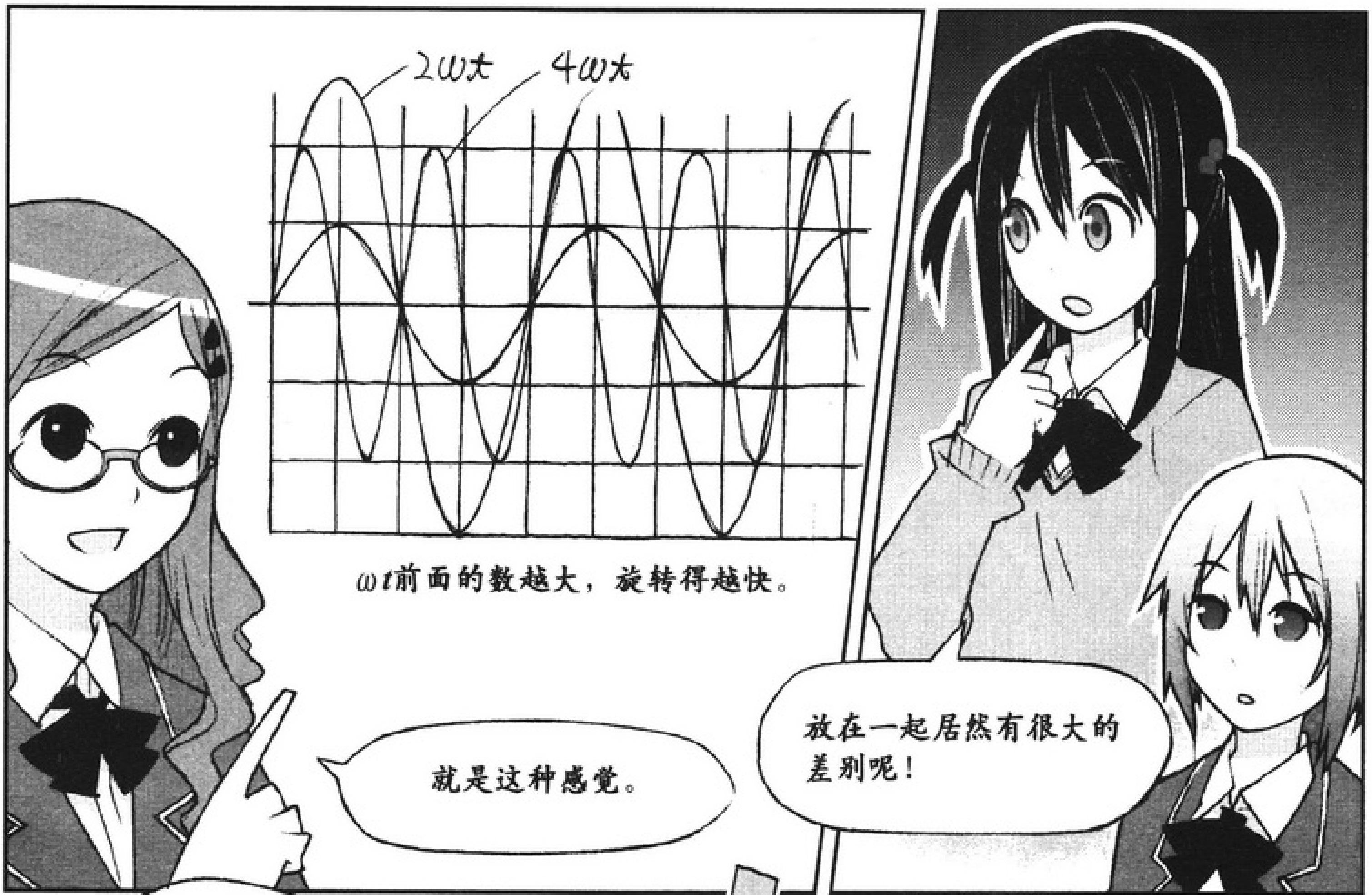
7. ωt与三角函数

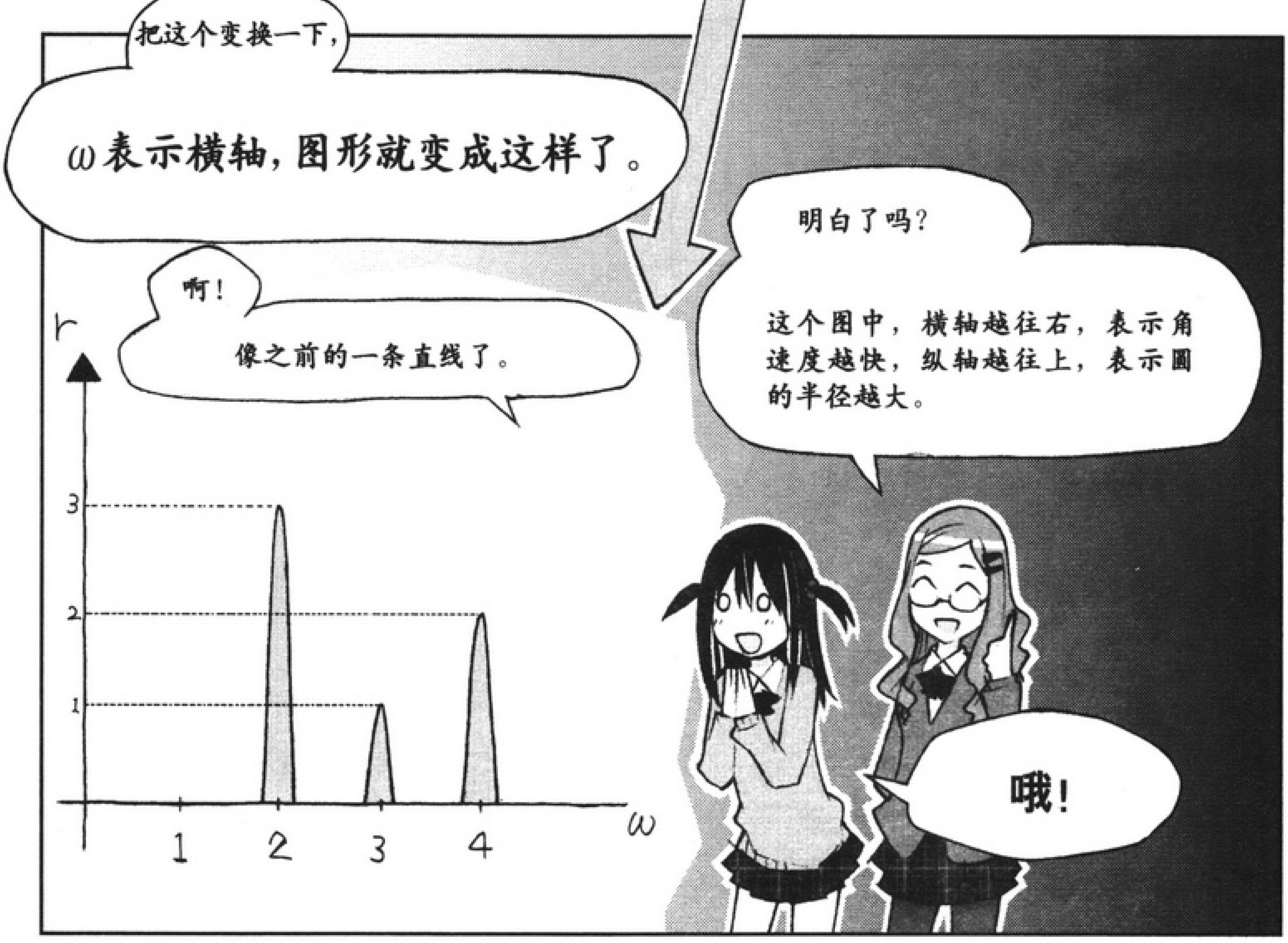


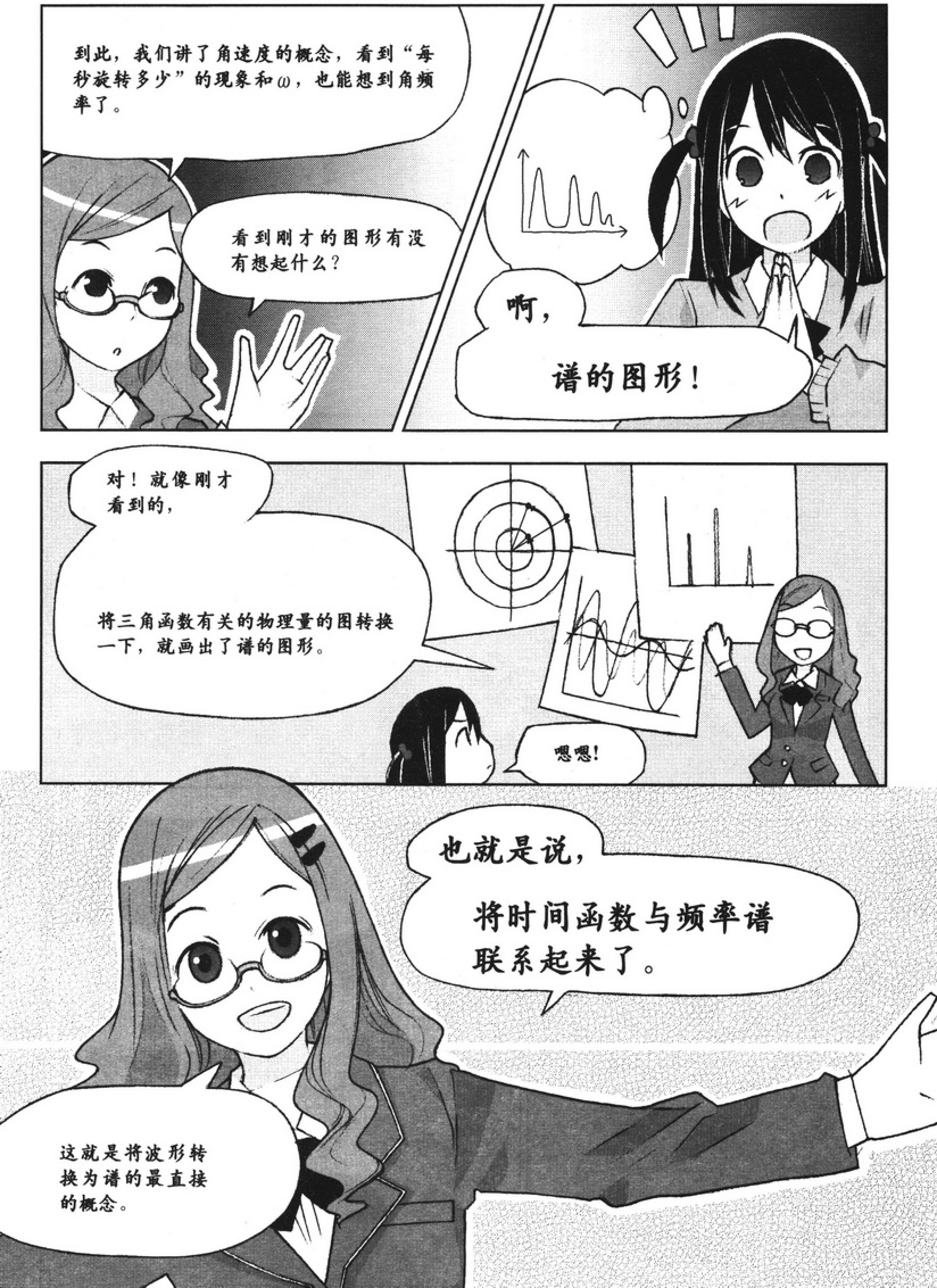

横轴为时间t，纵轴是y的位置，
画出这样的图形。
y
t
正弦函数……
原来如此……


之前用ωt的时间t为横轴的，这里用ω为横轴，
看一下，就变成这样了。
r
ω
啊，
变成了与纵轴平行的
线段。


由于ω为一定值，半径r不随ω变化，ω与半径r的图形就是这样了。
嗯！
这个也是
就变成这样的图形了。
想象一下有三个圆，圆周上的点旋转的速度各不相同。
慢速
正常速
快速
它们的半径分别为1，2，3，在图中画出它们的速度。
4ω大
2ω大
1
2
3
3ω大
三个点运动的位置随时间变化，是时间的函数，用图形表示是三个不同的正弦函数。
嗯，嗯！


2ωt
4ωt
ωt前面的数越大，旋转得越快。
就是这种感觉。
放在一起居然有很大的差别呢！


把这个变换一下，
ω表示横轴，图形就变成这样了。
明白了吗？
这个图中，横轴越往右，表示角速度越快，纵轴越往上，表示圆的半径越大。
啊！
像之前的一条直线了。
r
3
2
1
ω
1
2
3
4
哦！


到此，我们讲了角速度的概念，看到“每秒旋转多少”的现象和ω，也能想到角频率了。
看到刚才的图形有没有想起什么？
啊，
谱的图形！
对！就像刚才看到的，
将三角函数有关的物理量的图转换一下，就画出了谱的图形。
嗯嗯！
也就是说，
将时间函数与频率谱联系起来了。
这就是将波形转换为谱的最直接的概念。


哦！不经意间把波形转换成谱了。
但是，
以前也说过傅里叶变换中，波形需要满足有一定周期的条件。
可是自然现象很多都不满足这个条件。
自然
ぐりちゃ
ぐりちゃ
那就不行了！
在这样的情况下，将波形分出一段区间范围，将这个区间范围作为往返的周期，这样可以进行频率谱的计算了。
不过这是以后要讲的了。
今天就讲到这里吧！
谢谢绘里奈老师！

啊！
对对！
这个这个……
看看这个！
我们的海报：
girl乐队正在
招募主唱！
现在G.V.D的三人！
流行音乐的靓丽
风景一起摇滚吧
联系方式funica@ev


……
对！
单张海报……
把这个贴在校园里，肯定有很多人来应征！
……
别，
好丢人啊！
不用担心啦！没事！
猴子……
这不是企鹅吗？

第 3 章

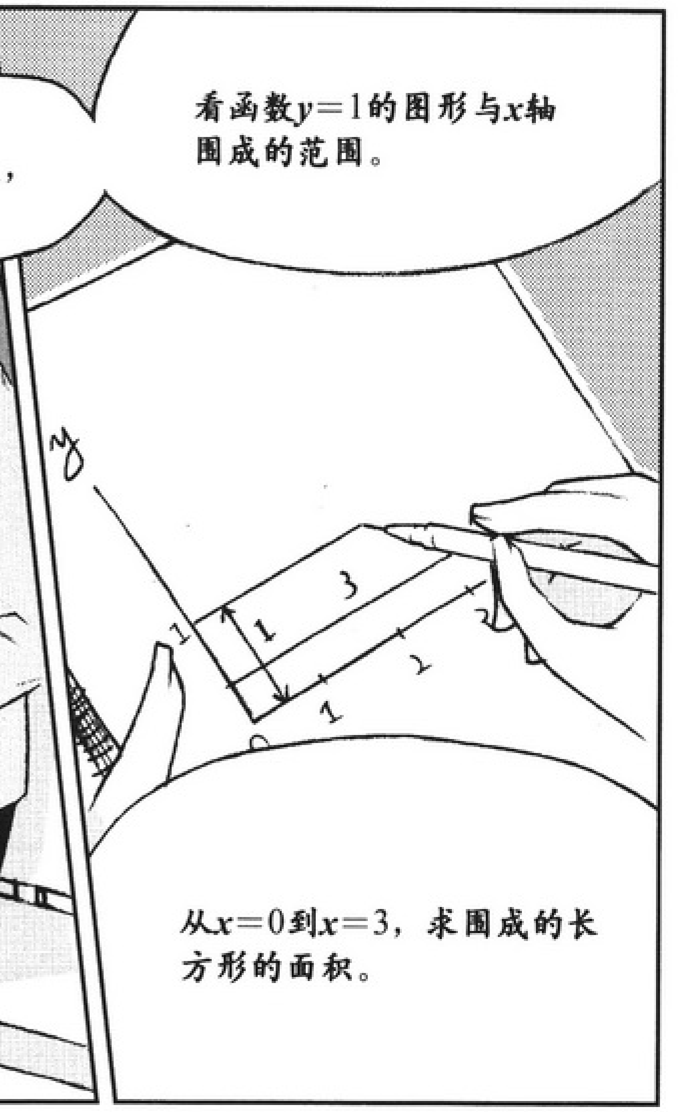
积分与微分


1. 积　分
太棒了！
虽然这么说……
呜呜
但是，也没有必要连续12次坐过山车……
唉，
真拿你们没有办法，
稍微休息一下吧！

绘里奈说今天的学习是研究过山车呢！
就是呢！
那休息一会儿，我给你们讲解一下吧！
我买冰淇淋了！
首先，
这次讲积分和微分。
sin + cos
先说明一下，
为了学习傅里叶变换，一定要学习三角函数，它是以sin和cos函数相关知识为中心的。
完全没有干劲
是！讲点简单的吧！
那么说，积分也与傅里叶变换有关系了？
在傅里叶计算的过程中，
需要对三角函数的乘法进行积分运算。
把三角函数
×
相乘
=
进行积分

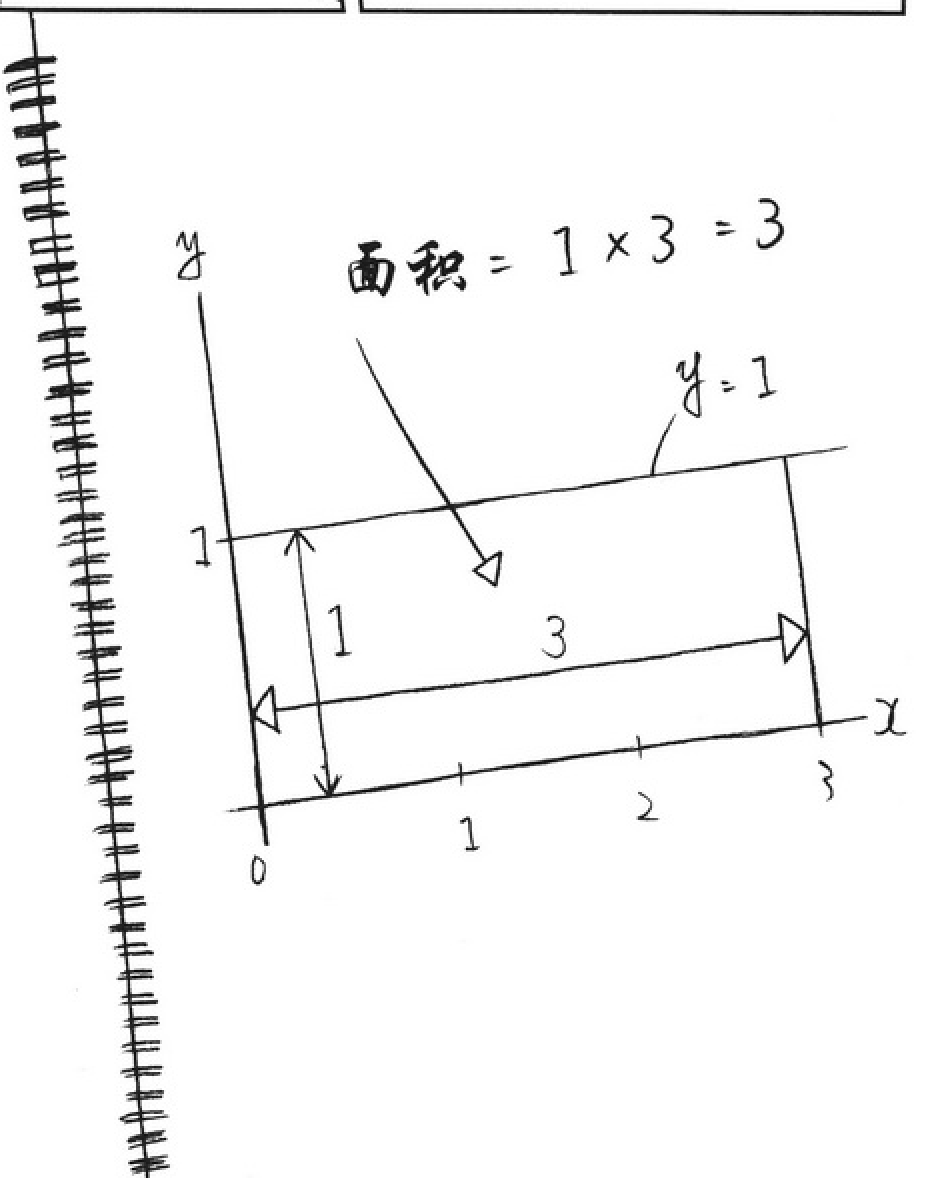

而且，
为了理解积分的概念，
微分
积分
要先理解与积分密切相关的微分知识。
好复杂的知识啊！
一般来说，教科书中都是从微分开始讲的，
①微分
这次为了便于理解，先从积分开始说。
暂不说这些，
积分与过山车有什么关系呢？
我们来看一下前面的过山车。
嗯！


切出一段过山车轨道的曲线来，用插着旗子的柱子在左右标记，过山车轨道下面部分用柱子界定的面积要怎么求呢？
地面
呃，这个不知道啊！
积分就能求出面积来！
积分
ドキーン
当然说到面积，
即使是复杂的形状，也需要用四边围起来。
在这里，用地面和过山车轨道作为上下边，
上
左
右
下
插着旗子的柱子作为左右两条边界。
这样突然讲复杂的曲线会很难理解，
那么首先用很简单化的例子来说明一下。



首先，
看函数y=1的图形与x轴围成的范围。
从x=0到x=3，求围成的长方形的面积。

好了！

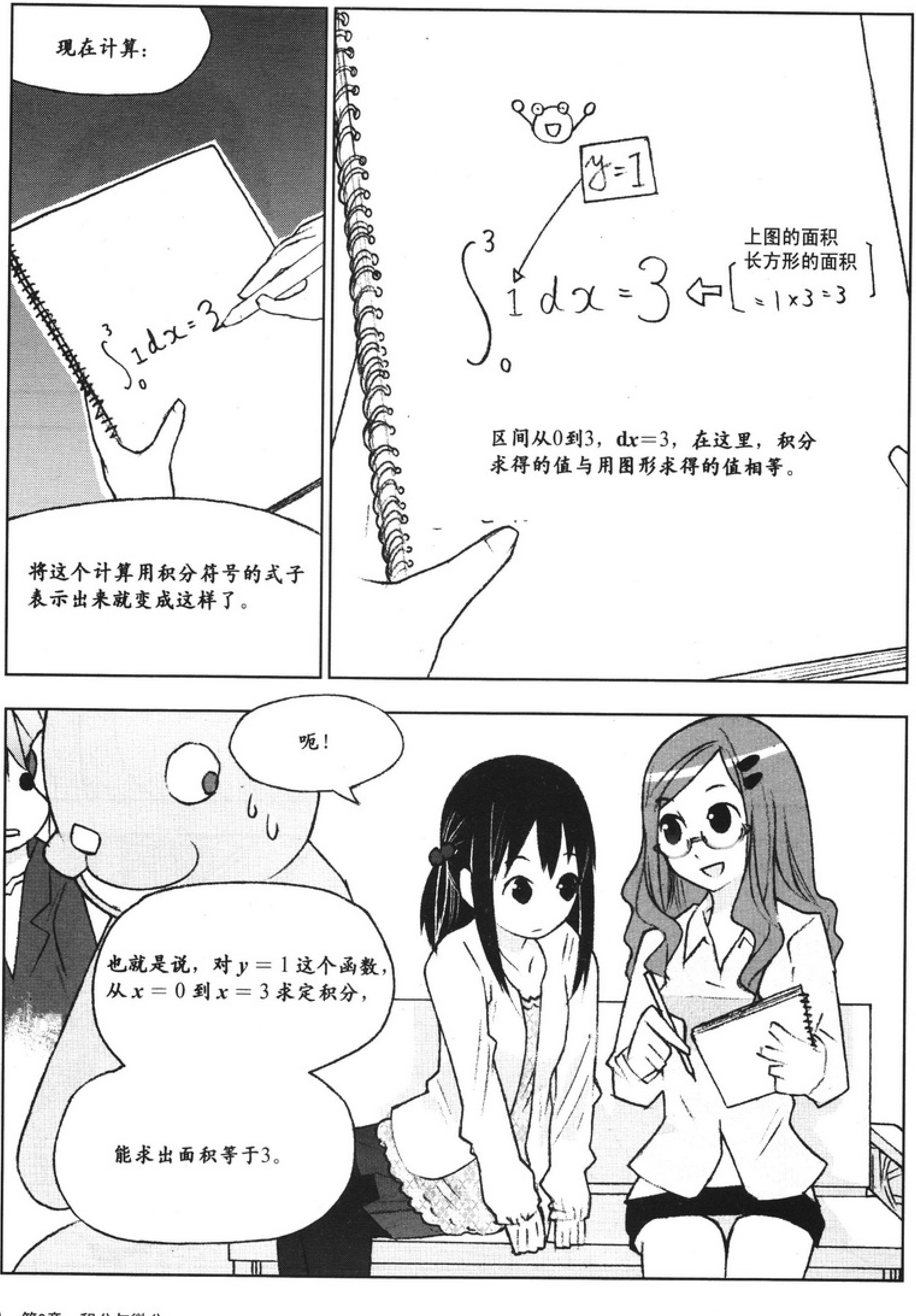


面积=1×3=3
y=1
y
x
1
3
0
2


这里的长方形高度＝1，长度＝3，
面积用1×3＝3很快就计算出来了。
3
1×3=3
1
嗯，嗯！

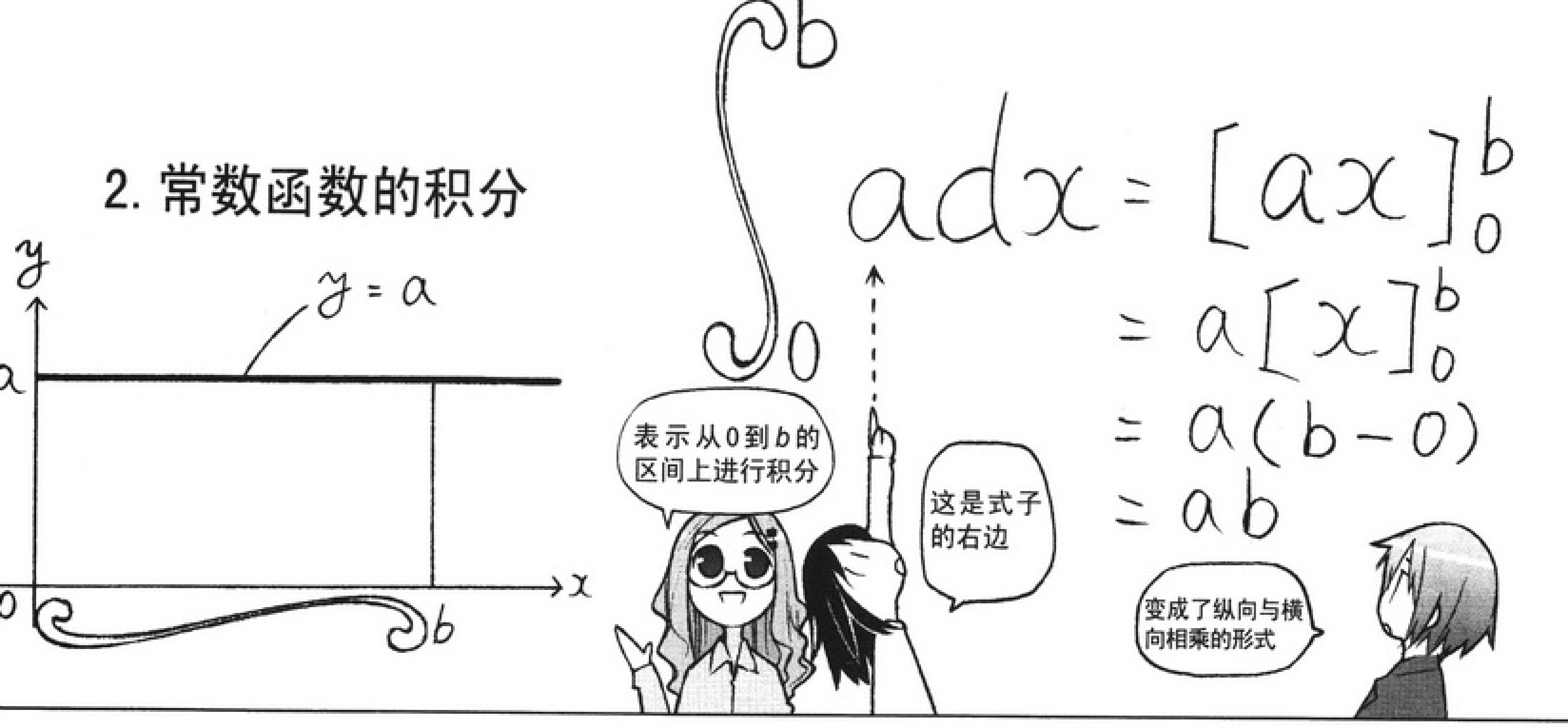

同样的，取x＝5时，
面积就等于5了。
y＝1的函数图形与x轴之间的空间，从x＝0开始到某个x值，这个长方形的面积与这个x值相等。
1×5=5
1
5
1×x=x
1
x


就是啊！
哈哈
也是理所当然的事情呢！
这是定积分的基础知识。


现在计算：
$\int_0^3 1\,dx = 3$
将这个计算用积分符号的式子表示出来就变成这样了。
$y=1$
$\int_0^3 1\,dx = 3$
上图的面积
长方形的面积
$=1\times3=3$
区间从0到3，$dx=3$，在这里，积分求得的值与用图形求得的值相等。
呃！
也就是说，对 $y=1$ 这个函数，从 $x=0$ 到 $x=3$ 求定积分，
能求出面积等于3。


对这样的函数设定一个区间，定积分是用来求这个区间的面积。
虽然数学式子看着很难，
但是明白了其中的意义肯定就很容易理解了！
傅里叶变换中采用的积分在积分中叫做定积分，
定积分
对不同的函数，积分计算不能很清楚地说明，但是用图形就能比较直观地求出来。
原来如此！
首先看之前的“$y=$常数”这样的函数。

2. 常数函数的积分

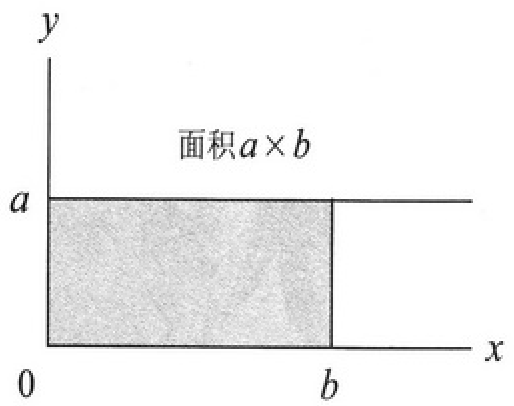


积分包括与稍后讲解的微分有关的不定积分和现在讲解的定积分。定积分实际上是将积分空间取出来，对此进行计算，求得某个面积值（数值答案）。而不定积分的结果是函数，不是某个数值。学校里是先讲不定积分。当然，如果理解了不定积分，也就能理解定积分了。

不过，定积分与求面积的问题有密切关系，在研究这个概念时，就算不懂不定积分，也能进行学习。在此看看 $y=a$ 从 $x=0$ 到 $x=b$ 的定积分吧（a、 b 都是常数）！很容易明白面积就是 $a\times b$。

应该可以得出长方形的面积呢！

将此用积分计算，图形变成这样（图3.1）。



$$\int_0^b a\,dx = [ax]_0^b = a[x]_0^b = a(b-0) = ab$$

◆图3.1　$y=a$、$x=b$ 代入微分公式

那么，将这个式子具体的解释一下，等式左边部分的意思是“对函数 $y=a$ 在 x 方向上关于 $x=0$ 到 b 求定积分”。 S上下弯曲的符号叫积分符号，表示对后面的式

子求积分。积分符号的上下标有小的文字或数字（在这里是 0 和 b），这表示积分的空间，下面的值表示区间的起始值，上面的值表示区间的结束值。

那， dx是什么意思呢？

d 表示微小的意思， dx 表示 x 的微小变化量。积分就是将微小区间的面积一点点加起来，从而求整个区间的面积的方法。

这样啊！

在这里 a 是定值，那在 x 上的积分就是 ax。 a 在 x 上的积分是 ax 的理由稍后用与微分的关系进行说明。总之，这里先理解这个：将 ax 放在中括号里①、在中括号的右边写上积分区间②，然后将定值 a 放到中括号外，这样就做好了往变数 x 里代入定积分区间的准备③。这样，将积分区间代入 x，用终点值（积分符号上面的值）代入得到的值④减去用起始值（积分符号下面的值）代入得到的值⑤（图 3. 2）。

$$
\begin{aligned}
\int_0^b a\,\mathrm{d}x &= \overset{①}{\left[ax\right]}_0^{b\,②} \quad {}^{*} \\
&\overset{③}{=} a\left[x\right]_0^b \\
&= a(\overset{④}{b}-\overset{⑤}{0}) \\
&= ab
\end{aligned}
$$

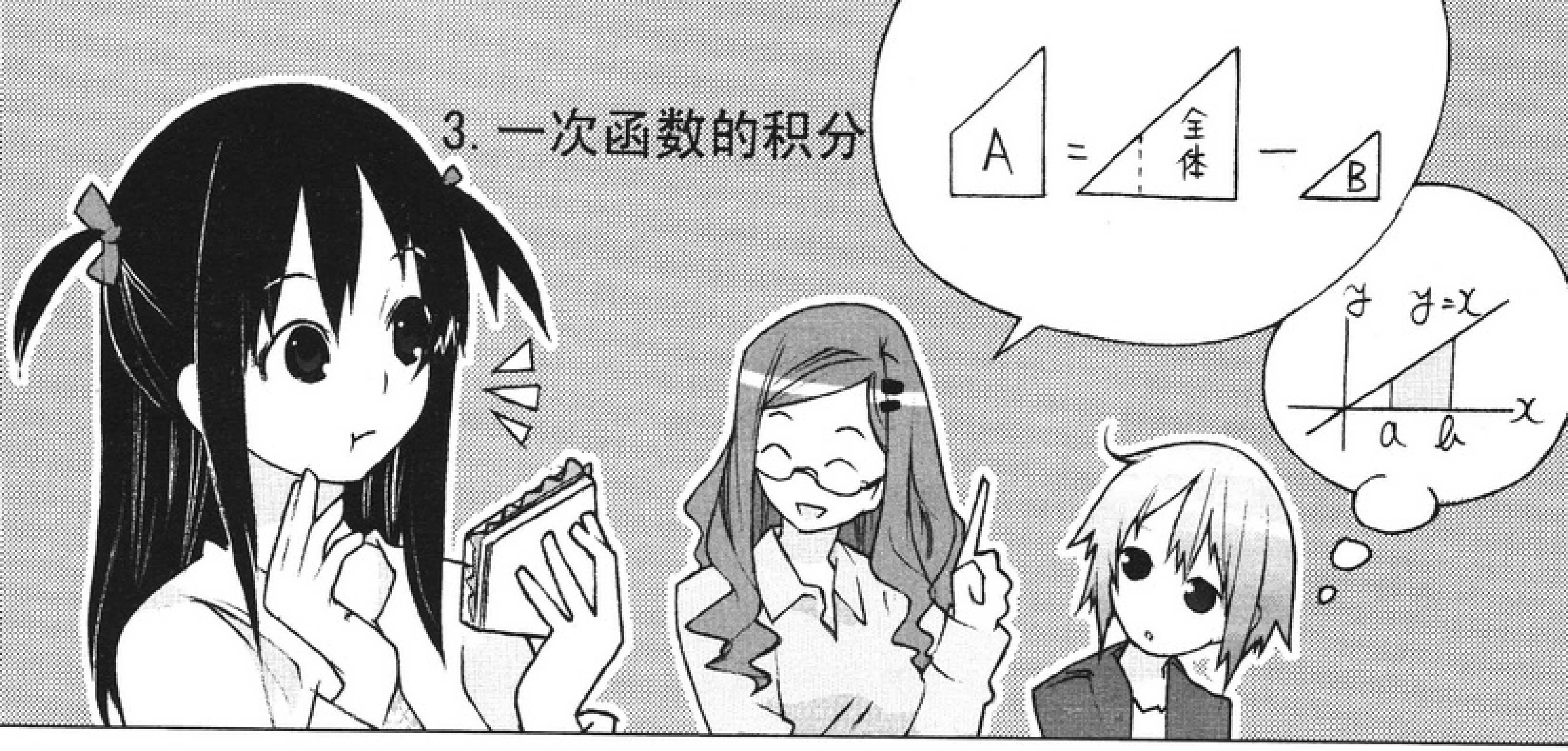
◆图3. 2 $y=a$、$x=b$ 的积分运算步骤

好复杂啊！

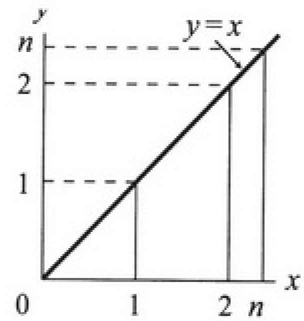
静下心来做就没问题。顺便说一下， $y = a$ 可以写成 $y=a\times x^0=a\times 1$ （请记住不管什么数的 0 次方都等于 1），这样的函数叫常函数，请注意对常函数进行积分可以得到类似 $y = ax$ 的一次函数。

* a 关于 x 的不定积分严格上说应该是 $ax + C$（C 为常数），这里只考虑定积分，因此，C 为常数项也可以不考虑。

3. 一次函数的积分



再看另一个例子。这次是 $y=x$ 这样的一次函数，这个函数的图形是通过原点的直线（图 3.3）。



◆图3.3　$y=x$ 的图形

这个 $y=x$ 的斜线与 x 轴之间围成的范围，求从 $x=0$ 到 $x=1$ 区间的面积。 $x=1$ 时 $y=1$，需要求的面积可以用简单的三角形面积公式来计算。还记得三角形的面积公式吗？

嗯……好像是：底边长 × 高 ÷2，对吗？

正确！来算一下……1×1÷2 = 1/2，那么 $x=2$ 的时候又会怎么样呢？

2×2÷2＝2。

对！可以说，$y=x$ 的函数与 x 轴围成的从 $x=0$ 到 $x=n$ 之间的三角形的面积是 $n\times n\div 2=n^2\times\frac{1}{2}=\frac{n^2}{2}$。也就是说对 $y=x$ 在 x 上的积分会得到 $\frac{x^2}{2}$。像常函数的积分得到一次函数一样，求 $y=x$ 与 x 轴之间范围的定积分，得到的结果是二次函数。

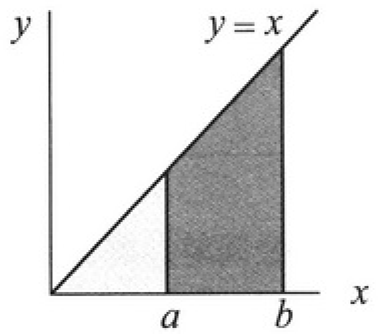
呃！太不可思议了！

那么，一般到此都会有这样的想法：积分＝求面积，严格地说，用积分的性质来求面积是非常方便的，虽然积分是很深奥的数学知识，但是在傅里叶变换的运算中，只学习与此相关的积分知识就可以了。

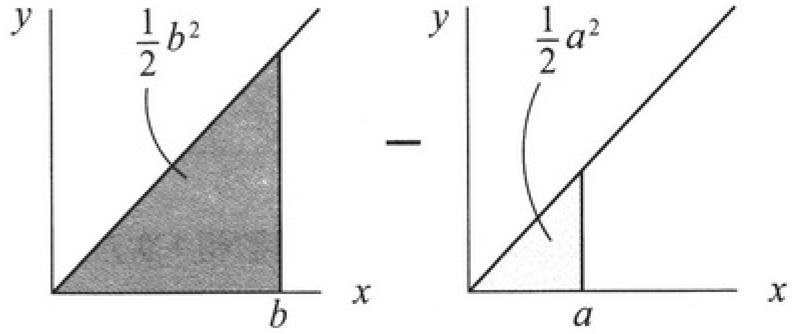
作为计算傅里叶变换的工具而采用积分……

就是这样的！这条直线与 x 轴围成的范围，求从 $x=a$ 到 $x=b$ 的梯形的面积要怎么做呢？在这里， a 和 b 都是正常数（图 3.4）。

嗯……先求从 $x=0$ 到 $x=b$ 的大三角形的面积，然后从中减去 $x=0$ 到 $x=a$ 的小三角形的面积不就可以了（图 3.5）？



◆图 3.4　求 $x=a$ 到 $x=b$ 的梯形面积



◆图 3.5　从 $x=0$ 到 $x=b$ 的三角形面积中减去从 $x=0$ 到 $x=a$ 的三角形面积

对！从 $x=0$ 到 $x=b$ 的大三角形的面积中减去 $x=0$ 到 $x=a$ 的小三角形的面积，得到梯形面积是 $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 。

这样啊！

我们用积分来计算一下，有下面的式子：

$$\int_a^b x\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

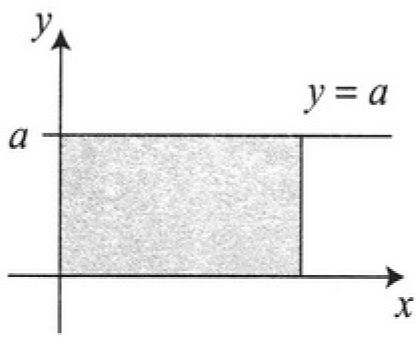
这个式子的左边是对 $y=x$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 进行定积分，右边表示计算的步骤，中括号里面是式子左边积分得到的 $\frac{x^2}{2}$ ，中括号外右边上下的数值与等式左边的积分符号上下的数值相同，将常数 $\frac{1}{2}$ 放到括号外面，将区间上面的 b 代入最后的式子得到计算值，减去区间下面的 a 代入后得到的计算值，从而得到结果，这样就完成定积分的计算了。

这个也用积分公式计算出来了呢，结果与之前说的从 $x=0$ 到 $x=b$ 的大三角形的面积中减去 $x=0$ 到 $x=a$ 的小三角形的面积计算的结果相同呢！

到此为止，关于 x 的 0 次方的函数和 1 次方的函数的积分已经简单地解释了一下。也就是说，在 x 的 n 次方函数中，我们已经学习了 $n=0$ 和 $n=1$ 的情况，那么，我们来推测看看 $y=x^n$ 函数的积分会是怎样的？

突然提起，完全不明白……

那么，我们稍微整理一下，首先，最初的例子 $y=a$（$y=a\times x^0$）对应于 $n=0$，这个函数对 x 积分得到 $1\times a\times x^1$（$=ax$）（图 3.6）。



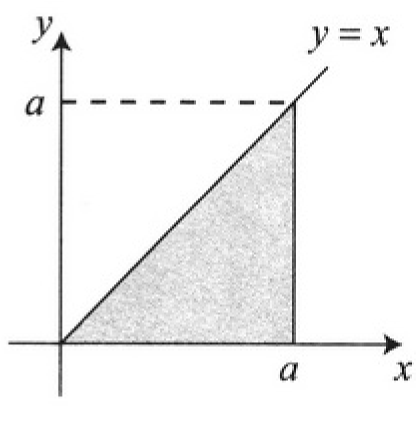
次数(n)　　系数　　次数

$y=a\times x^{0}$ ⟹积分⟹ $1\times a\times x^{1}$ ➡ ax

(1次式)

◆图 3.6　$y=a$ 的积分

接着我们讲了 $y=x(=x^1)$ 函数的积分，从图形表示的面积关系得到 $\frac{1}{2}x^2$（图 3.7）。



次数(n)　　系数　　次数

$y=x^{1}$ ⟹积分⟹ $\frac{1}{2}\times x^{2}$ ➡ $\frac{x^2}{2}$

(2次式)

◆图 3.7　$y=x$ 的积分

那么，来推论一下，$y=x^n$ 函数的积分会是怎样的。

嗯……

$n=0$ 时，x 前面的系数为 $1\left(=\frac{1}{1}\right)$，$n=1$ 时系数是 $\frac{1}{2}$，根据之间的联系类推，一般 n 次方函数的积分结果的系数是……

是 $\frac{1}{n+1}$ 吧……（图3.8）

$$n=0\text{时，}\xrightarrow[x\text{前面的系数为}1]{\text{得到}} 1\left(\frac{1}{1}\right) \qquad n=1\text{时，}\xrightarrow[x\text{前面的系数为}]{\text{得到}} \frac{1}{2} \qquad \xrightarrow[\text{的积分结果的系数是}]{\text{类推一般}n\text{次方函数}} \frac{1}{n+1}$$

◆图 3.8　类推一般 n 次方函数的积分结果的系数

对！很有意思的类推呢！x 的指数也是，$n=0$ 时的积分得到 x^1，$x=1$ 时的积分得到 x^2，以此类推，n 次方的积分结果为 x 的指数是 x^{n+1}（图 3.9）。

$$\text{当}n=0\text{时，}\xrightarrow[\text{等于}]{x\text{的指数}} x^{1} \qquad \text{当}n=1\text{时，}\xrightarrow[\text{等于}]{x\text{的指数}} x^{2} \qquad \xrightarrow[\text{数的积分指数等于}]{\text{以此类推}n\text{次方函}} x^{\boxed{n+1}}$$

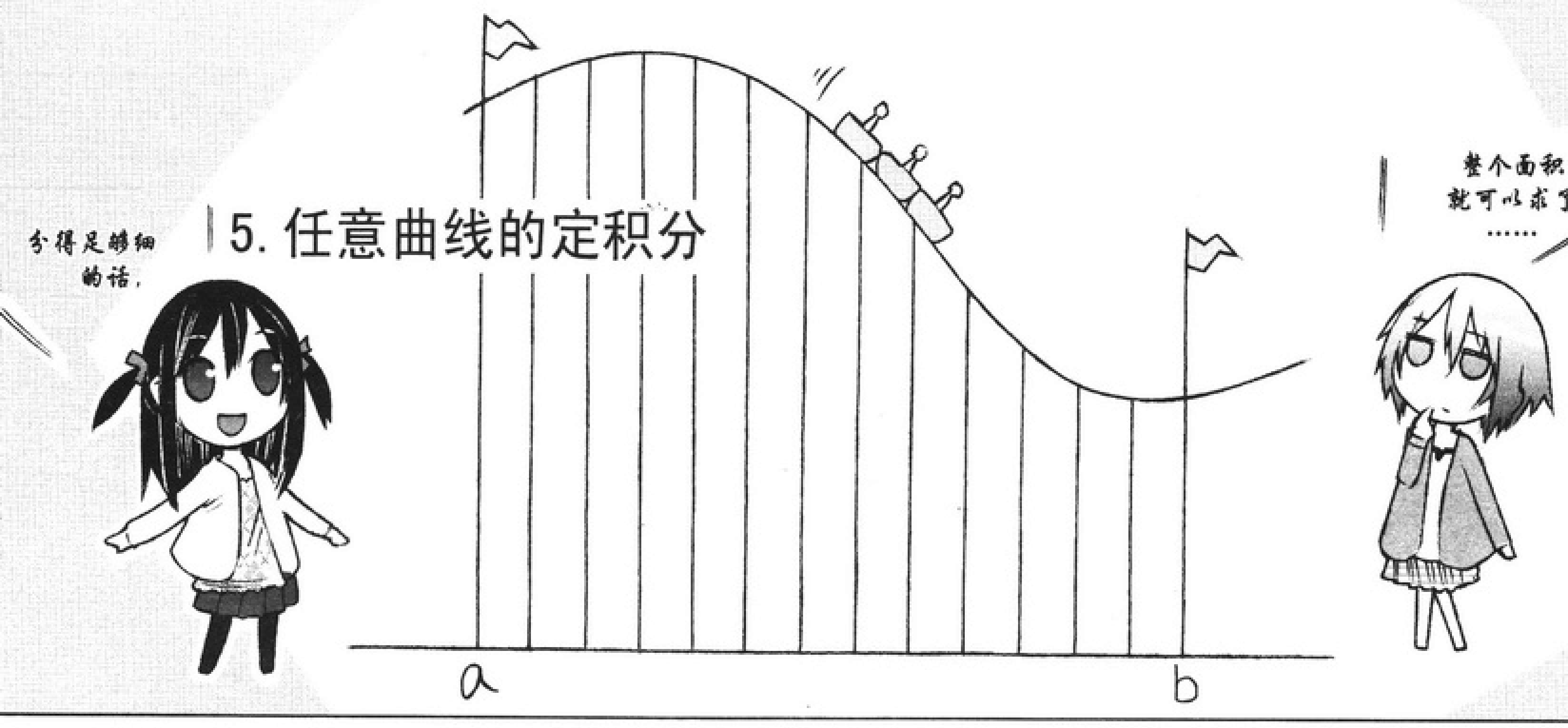
◆图 3.9　一般情况下，n 次方的 x 的指数以此类推

原来如此啊！

总结一下，对 $y=x^n$ 函数进行积分，积分得到的函数是：

$$y=x^n \quad \xRightarrow{\text{积分}} \quad \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

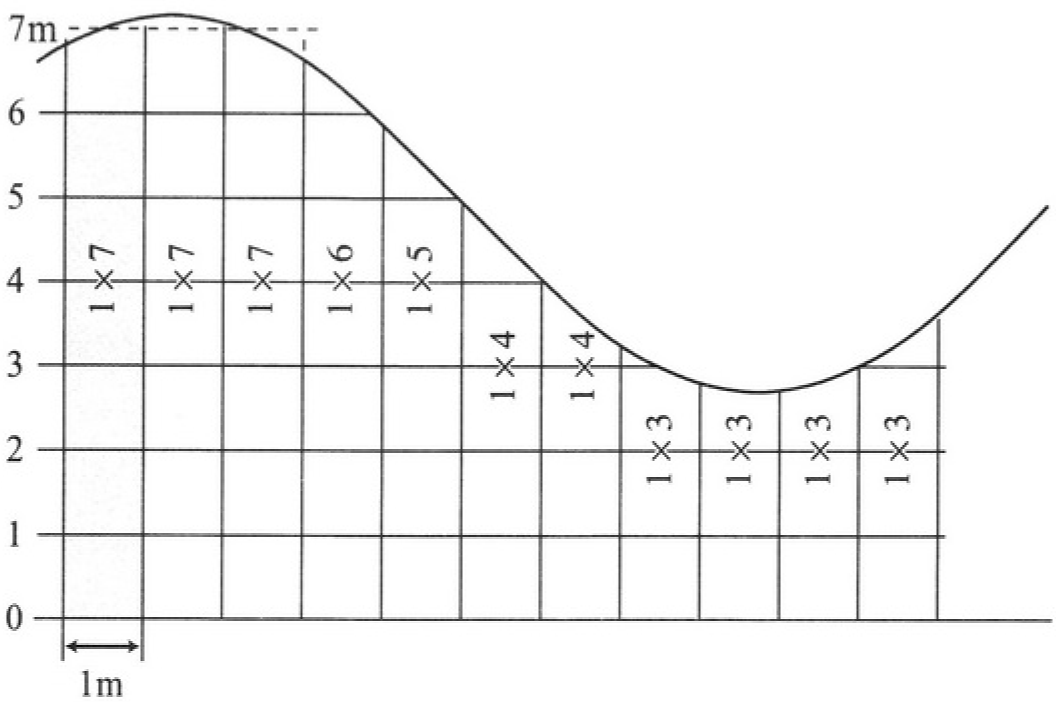
仅仅从这么几个例子证明中推测出全体此类函数的结果，从数学上来说是欠严谨性……



那么，我们回到过山车的话题上来吧！

哦！回到过山车上来了！

假如，在图形中取间隔为1米的小区间，计算区间的高，求区间与过山车轨道围成的面积，将大区间分为许多这样的小区间，依次按顺序求这些区间的面积，加起来而得到大区间的面积（图3.10）。



$=1\times7+1\times7+1\times7+1\times6+1\times5+1\times4+1\times4+1\times3+1\times3+1\times3+1\times3$

像这样先求小区间的面积，加起来就能得到大区间全体面积。

◆图 3.10　间隔为 1m 的区间的面积的和

确实是这样，需要很多计算呢！

小区间的间隔取得越小，求得的大区间的面积就越准确，这是教科书中定积分的概念。

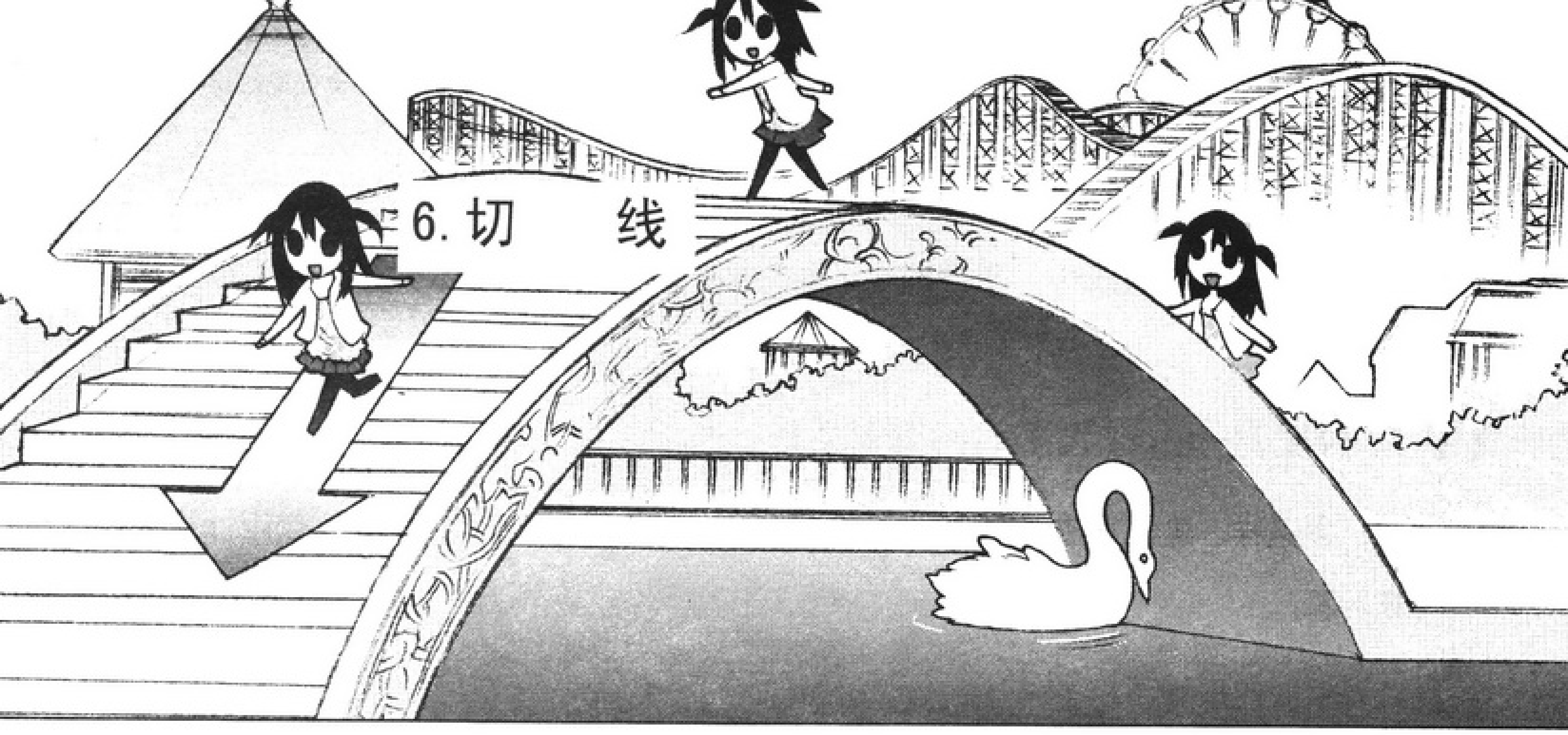
原来如此啊……，不过计算还是很麻烦啊……

嗯，是这样，这种方法，在数学表达式（数学函数）无法表示的场合，就用计算机来计算。

计算机时代来到了！

来到了……

不过，有的情况下需要求的面积能够用简单的表达式表示，如果理解了概念，不用计算机也能计算出来。因为简单表达式的定积分，计算过程简单。



6. 切　线

掌握了积分的基本概念，接下来讲微分吧。微分其实就是积分的逆运算。

逆运算？

就是反过来运算，举个例子……

2 乘以 5 答案为 10，假设这个运算叫顺运算的话，那么，10 除以 5 得到 2 就叫做逆运算。

原来如此……

那么说，对 A 进行积分得到 B，逆运算，对 B 进行微分得到 A。当然微分不与积分联系起来，也能掌握微分知识。首先，解释一下微分的基本概念：函数的切线。

……函数的切线？

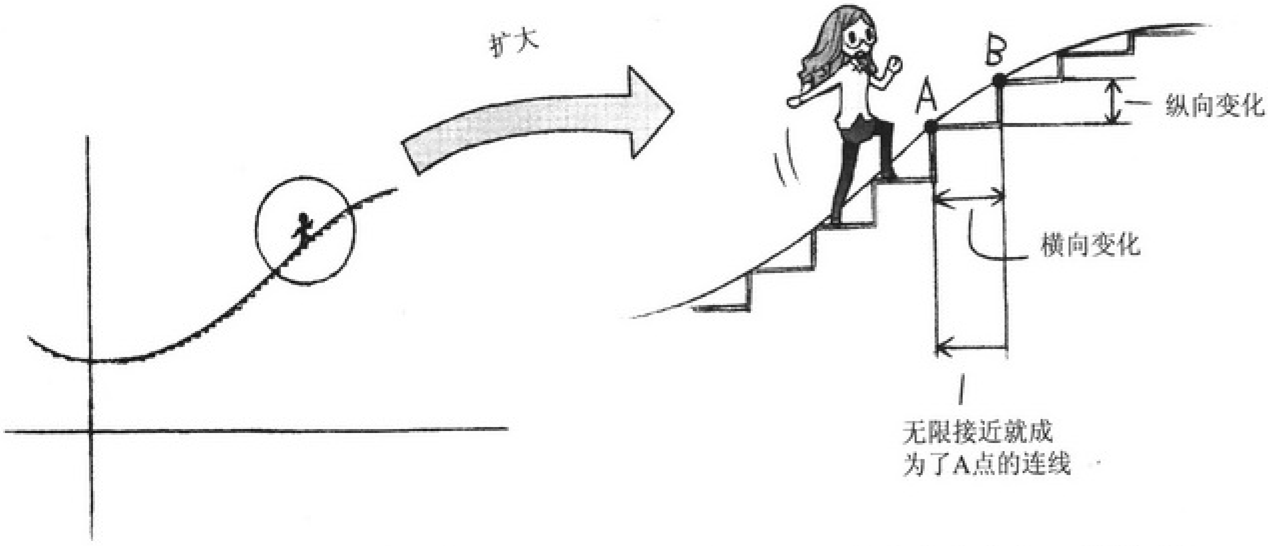
函数上一点的切线，是过这个点与图形相切的直线。然后研究切线的斜率。直线的斜率等于纵轴的变化量除以横轴的相应变化量。

等一下！过点相切的直线的斜率是什么？点也有斜率吗？是这个点的斜率，还是直线的，到底是哪个的？

呵呵，冷静一下。具体的意思很简单，等一下我们再解释。

假设有个沿某复杂曲线走向的一段台阶，某一个台阶取做A点，相邻的台阶取做B，在这里A和B之间有纵向变化又有横向变化，连接AB点得到的直线就有

斜率（图3.11）。



◆图 3.11　关于台阶的斜率：B 无限接近 A，AB 直线就会变成过 A 点的切线

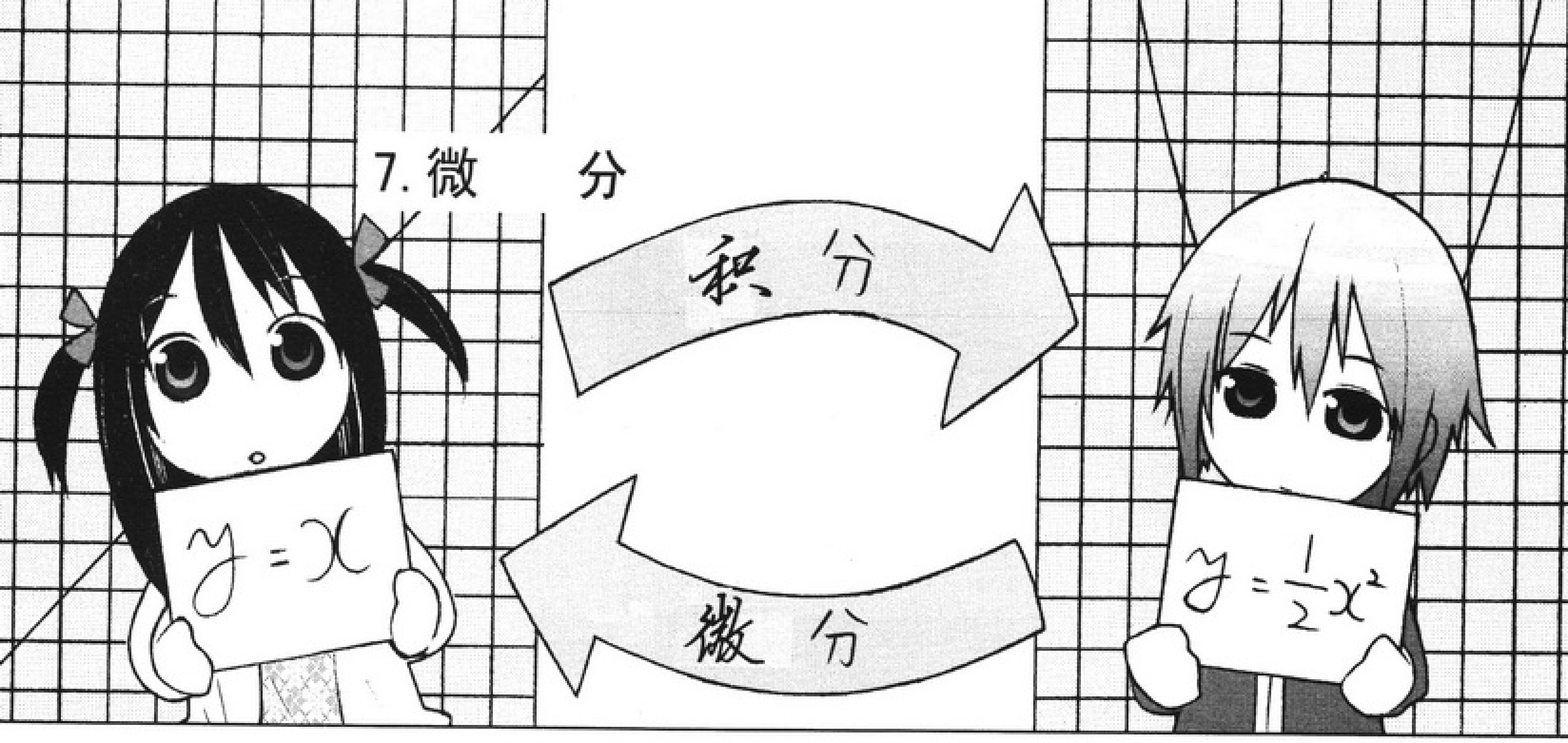
这个 A 和 B 越来越接近的话，台阶的宽度越来越小，最后 A 和 B 重合在一起，达到这个极限时 AB 直线就变成了切线了，这个切线上纵向变化量除以横向变化量就能得到切线的斜率了。

这样啊，点的切线确实是这样呢……

微分就是求切线的斜率。

那微分是积分的逆运算又要怎么解释？

7. 微分



现在请你们回忆一下，对直线（一次函数）积分得到二次函数。

嗯……这会怎么样呢？

积分的逆运算是微分，那么对二次函数进行微分应该得到一次函数。积分的例子，对 $y = x$ 进行积分得到 $\frac{1}{2}x^2$，将此进行逆运算，对 $y = \frac{1}{2}x^2$ 进行微分就会得到 $y = x$。

这样啊！

回忆一下积分：$y = x^n$ 积分得到 $y=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，对此运算进行逆运算，求 $y = x^2$、$y = x^3$ 等函数的微分如图 3.12 所示。

这个部分将系数1分解为 $\frac{1}{1+1}\times 2$

$\boxed{y = x^2}$ $\quad y = \frac{1}{\underbrace{1}_{n}+1} \times 2 \times x^{\overbrace{1}^{n}+1} \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad 2x^{\overbrace{1}^{n}}$

$\boxed{y = x^3}$ $\quad y = \frac{1}{\underbrace{2}_{n}+1} \times 3 \times x^{\overbrace{2}^{n}+1} \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad 3x^{\overbrace{2}^{n}}$

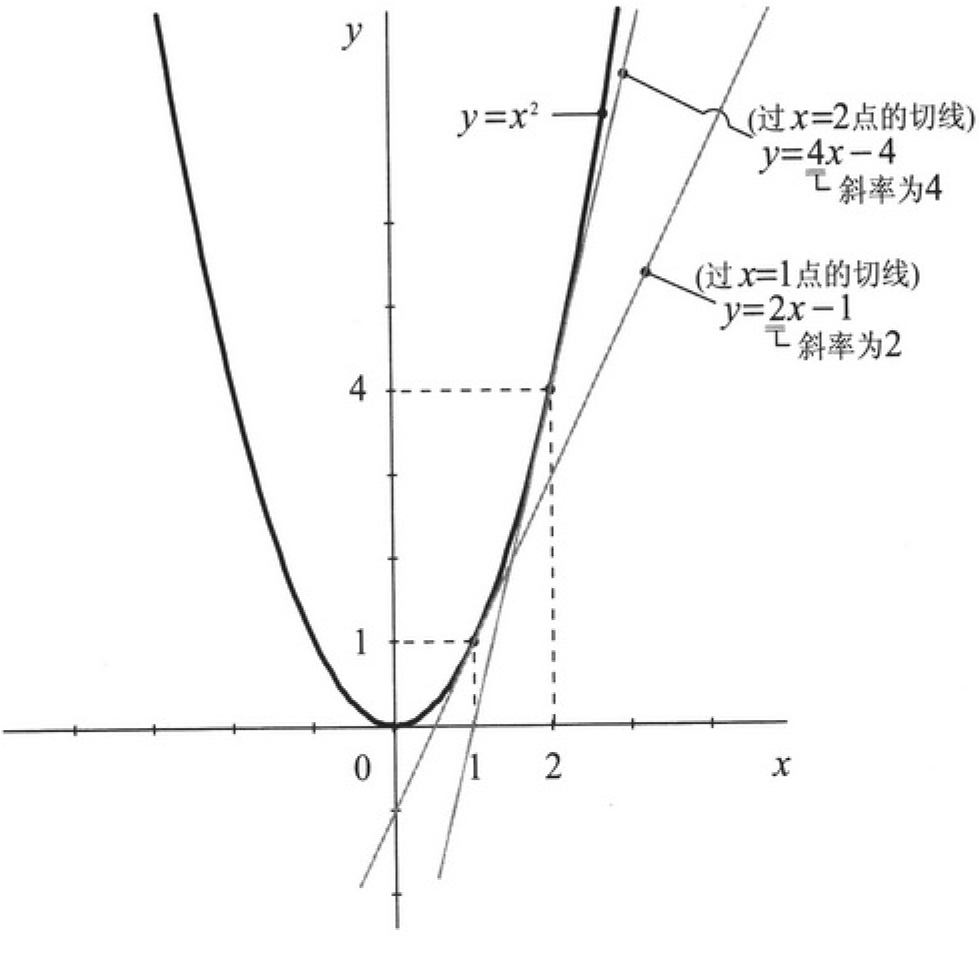
◆图 3.12　从积分的逆运算考虑 $y = x^2$ 和 $y = x^3$ 的微分：为了使系数仍保持为 1，乘以 2

利用逆向思维分析积分表达式能求得微分啊！

对啊！但是，每次都这么分析是很麻烦的，根据上图可推导出规律性来。$y=x^2$ 的微分结果是 $y=2x$、$y=x^3$ 的微分结果是 $y=3x^2$，依次类推分析对 $y=x^n$ 微分，得到的微分函数为：$y=x^{n+1}$ 微分→$(n+1)x^n$ 或者将 n 换成（$n-1$）$y=x^n$ 微分→ nx^{n-1}。

哦，很快就求出来了呢！

基于此，我们来研究一下二次函数 $y=x^2$ 的切线吧。之前我们证明了 $y=x^2$ 的微分结果是 $y=2x$。由于微分的结果是求斜率的函数，试着将 x 的坐标代入到这个式子中。将 $x=1$ 代入这个式子得到 $y=2$，将 $x=2$ 代入得到 $y=4$，因此很容易明白了，分别过这两个点的切线的斜率为 2 和 4 （图 3.13）。



◆图 3.13　$y=x^2$ 切线的斜率

现在边看图边思考，关于函数 $y = x^2$ 的切线的斜率的表达式，过某个点的斜率是这个点 x 值的 2 倍。

嗯！是这样呢！

这里写出用到微分符号的切线的表达式：$\frac{d}{dx}x^2=2x$ 也可以写成：$(x^2)'=2x$。这个结果 $2x$ 也是关于 x 的函数，把这个的表达式叫做原函数的导函数。

$(x^2)'$ 是什么意思？

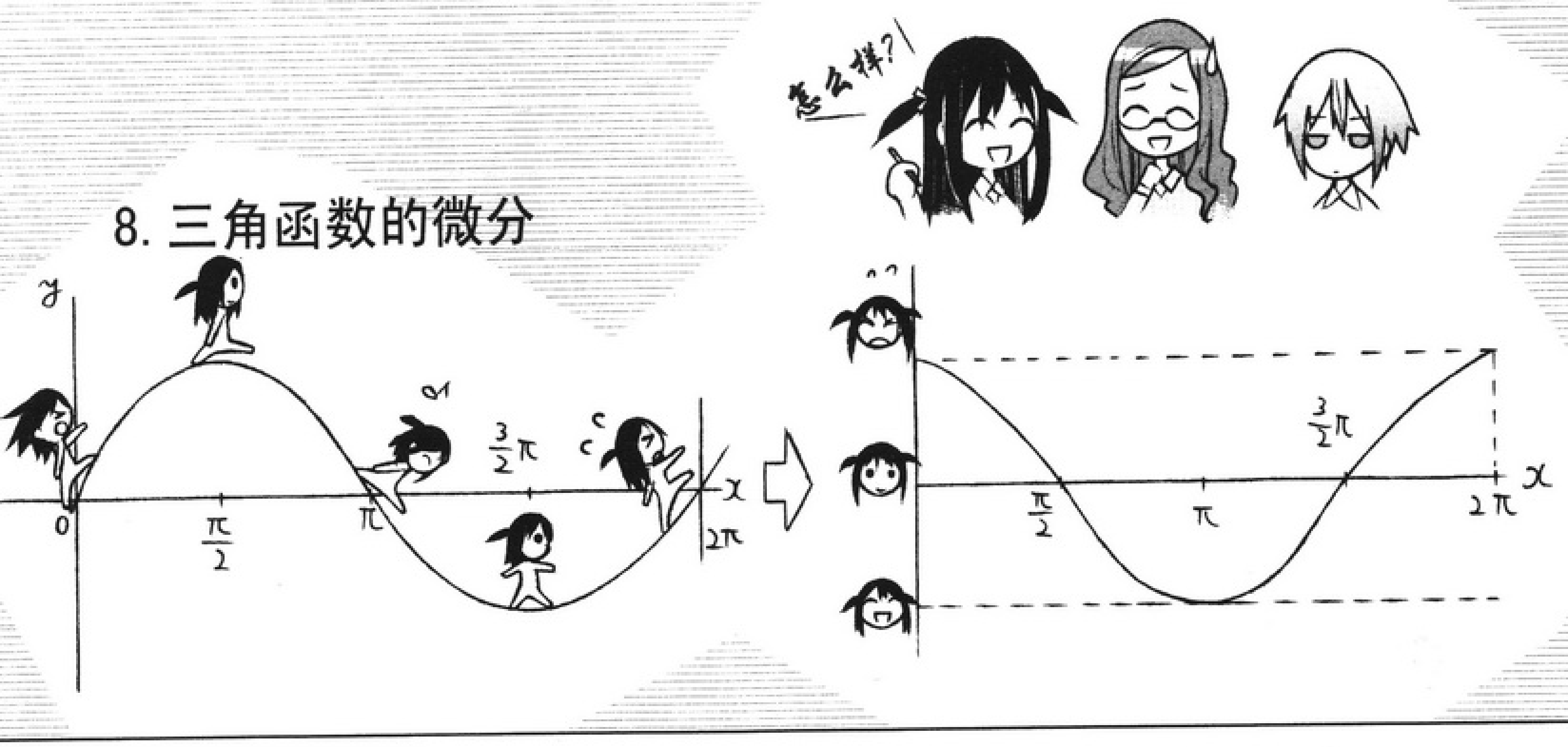
$(\quad)'$ 也是“对某个函数进行微分”的符号。$y = f(x)$的微分可以写成 $\frac{d}{dx}f(x)$，在简化的情况下也可以采用$(\quad)'$符号。$(\quad)'$ 在汉语中读作“……的微分”，这种叫法通俗易懂。

那 $(x^2)'$ 就是表示“x^2 的微分”的意思了……

提一下，大多数函数能直接进行微分计算，而积分并不是看见函数就能马上计算出来结果的。不过，由于积分是微分的逆运算，知道了微分的结果，采用逆运算能很简单地求出积分来。例如，一个函数是某个原函数微分的结果，那么这个原函数称为原始函数。定积分的计算中写在中括号里面的函数就是原始函数。还有，求原始函数的运算正是不定积分。

不定积分在这里也出现了呢……

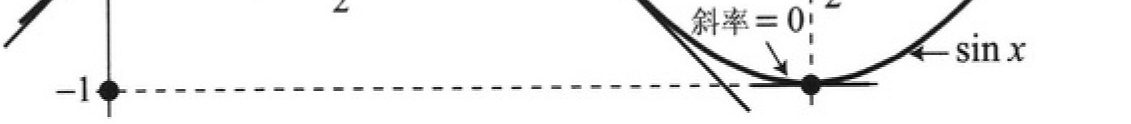
8. 三角函数的微分



现在来学习正弦函数的微分吧！

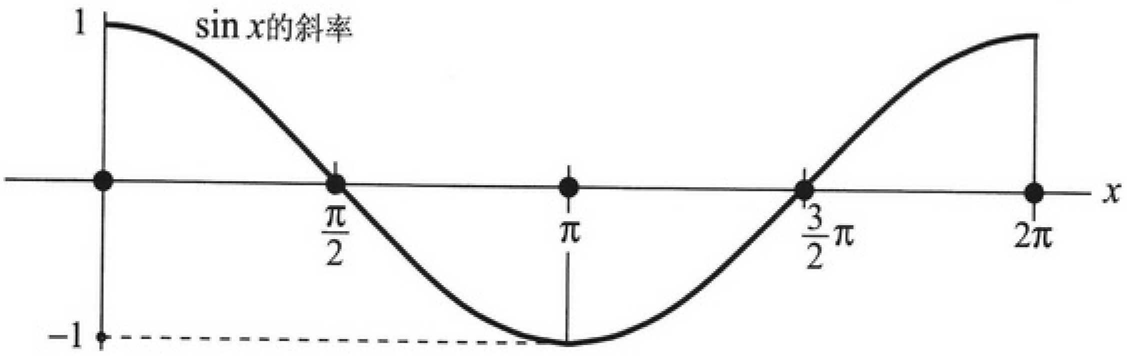
正弦函数的微分……是研究正弦函数各点的切线的斜率情况吗？

对！首先，来研究一下 $y = \sin x$ 这个函数。在 $x = 0$ 这个点，切线的斜率是 1。随着 x 值的逐渐增大，斜率在慢慢变小。也就是说微分值随着 x 值的增大而在逐渐减小（图 3.14）。



◆图3.14　$y=\sin x$ 各点的切线的斜率

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，切线斜率变成了 0，而且随着 x 增大，斜率变成沿着右下方向走向，斜率为负值，倾斜程度逐渐增大（负的倾斜程度增大，数值在减小）。那么当 $x=\pi$ 时，倾斜程度最大，斜率为 −1，当 $x=2\pi$ 时，斜率为 +1。这个过程会反复出现，将这个斜率的变化过程用图形表示，如图 3.15 所示。



◆图 3.15　$y=\sin x$ 的斜率的变化

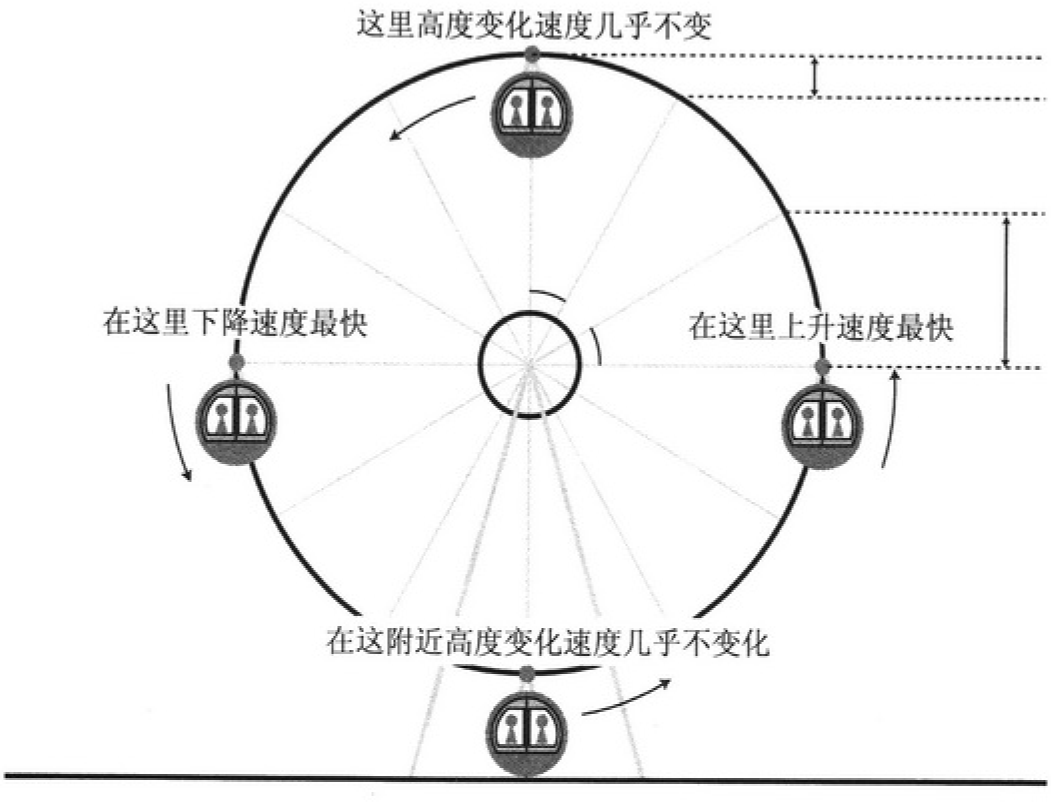
这又变成了波形呢！

之前说了摩天轮的例子，现在请回忆起之前坐过的摩天轮。

坐过山车之前坐的呢！

嗯……

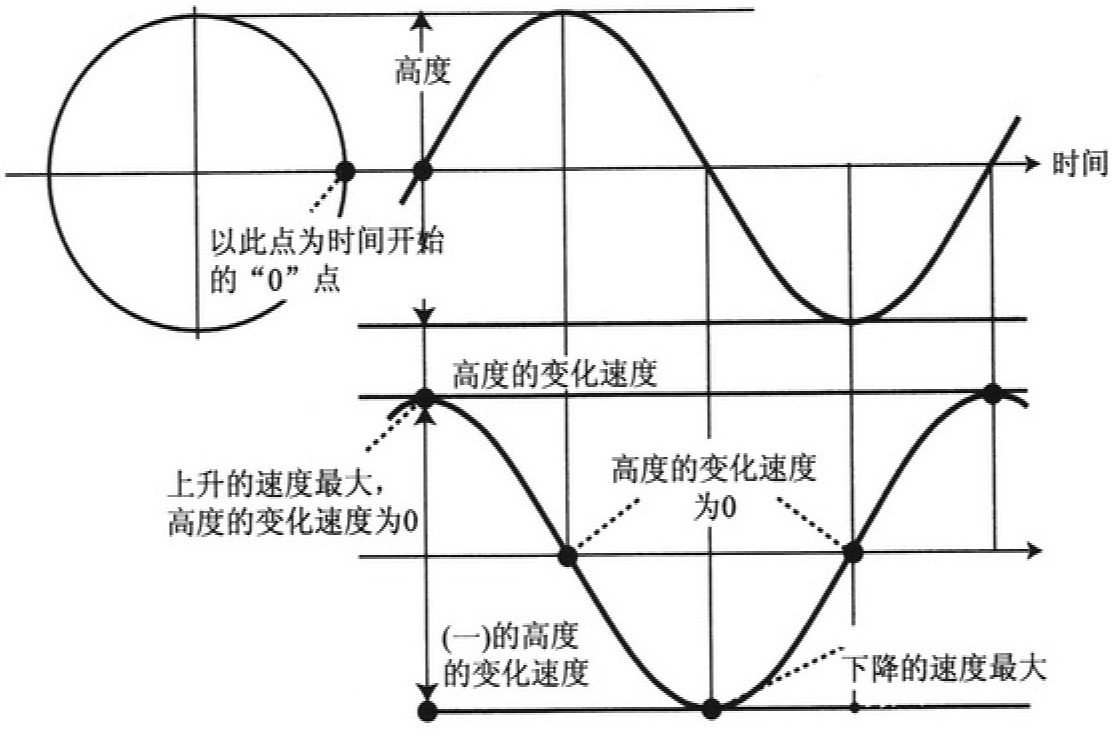
斜率的变化就像之前看到的并不是一个定值。摩天轮的观缆车从与轴心相同的高度开始运动，开始的时候高度在逐渐增大，当接近顶点时，感觉暂时停在顶点了，高度没有怎么变化。之后，高度逐渐降低，降低的速度越来越快，当经过与轴心相同的高度时速度最快，接着，高度的变化又变得越来越慢了（图3.16）。



◆图 3.16　研究摩天轮的观缆车高度的变化情况

啊！确实是，从下面坐观缆车上去的时候和快到顶点的时候，都感觉很慢，而在上升和下降的时候，情况就不是这样的。

有印象了？观缆车在以一定的速度旋转，研究高度的变化，发现最高点和最低点的高度的变化速度几乎为零，而在中间，高度的变化速度变得很大。请记住高度的变化快慢用图形表示出来是正弦函数呢（图3. 17）。



◆图3. 17　观缆车的高度图和高度变化的速度图

这个“高度的变化速度”是正弦函数的微分函数，是正弦函数的导函数，还记得这个形状的图吗？

……余弦函数。

对！也就是说，对正弦函数（sin 函数）进行微分得到的结果是余弦函数（cos 函数）！用等式表示：$(\sin x)' = \cos x$。也可以说，cos 的原始函数是 sin 函数。

呃！

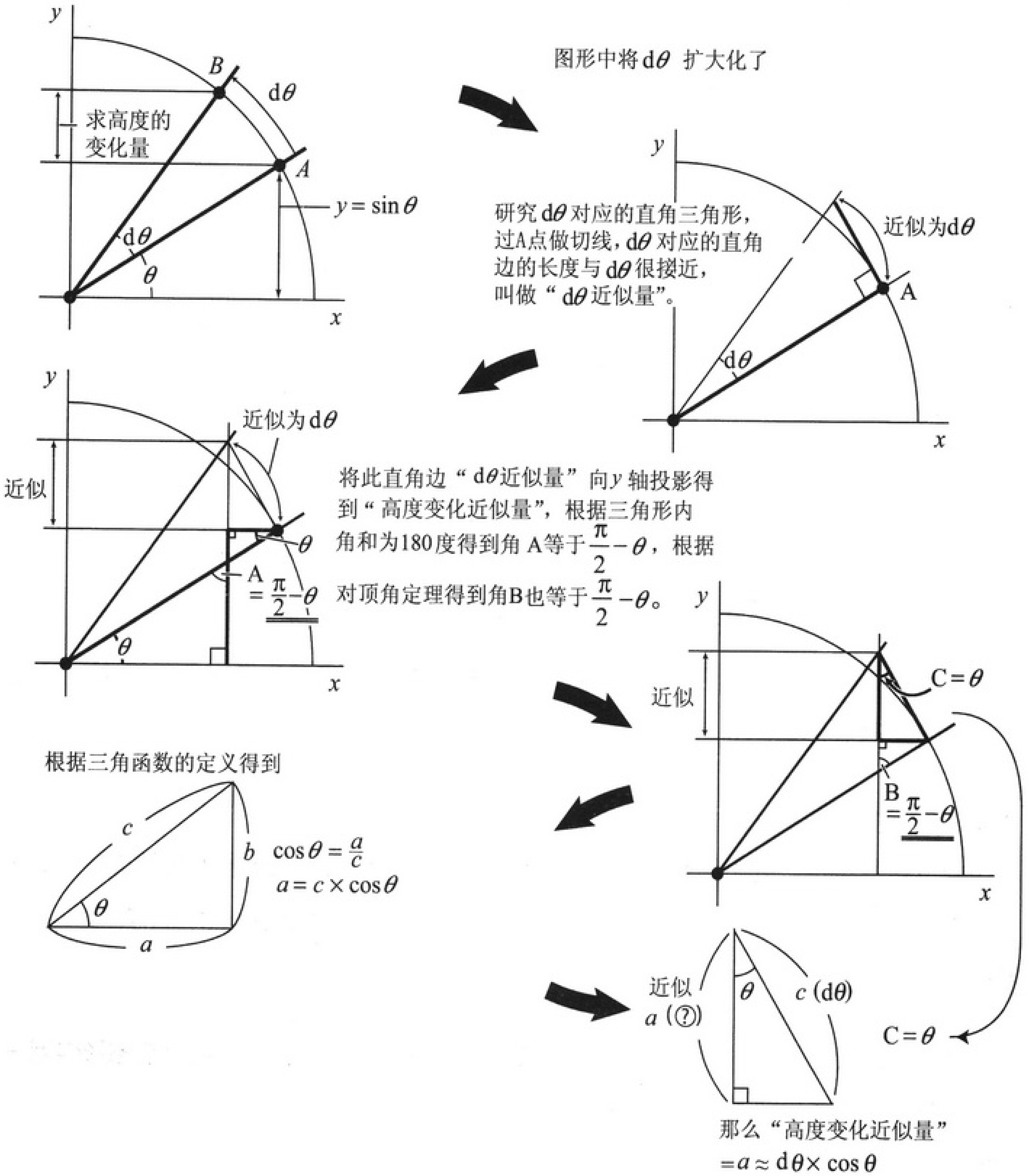
到此为止没有用数学表达式，都是边看图边解释的，现在我们也附带在图形中用一些数学式子来证明一下吧！

数学……

没关系的啦！以之前的知识为基础，加油学习吧！

首先，将单位圆取出四分之一，从 x 轴开始某个 θ（弧度）对应的点 A 的高度 y，根据之前讲三角函数的知识有：$y=\sin\theta$。

此时 θ 增加很小的幅度 $\mathrm{d}\theta$，移动到 B 点，研究高度的变化量，利用三角函数定理得到下面的图（图 3.18）。



◆图 3.18　求高度 y 的变化

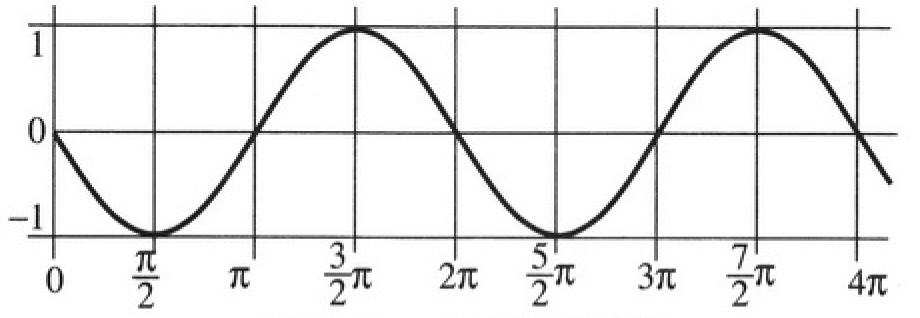
这样高度的变化量为 $d\theta \times \cos\theta$。在这里，“$d\theta$ 近似量”、“高度变化近似量”这些比较暧昧的表达方式不会带来问题，这些微小变化量，当接近于极限时它们与正确值相等。这样我们明白了高度 y 的变化快慢是这个点的角度 θ 的余弦函数。

高度 y 是正弦函数，变化快慢……也就是微分后的 $d\theta \times \cos\theta$ 的 $\cos\theta$ 呢！

很小的 y 的变化，也就是 $\sin\theta$ 的变化可以写成 $d(\sin\theta)$，$d(\sin\theta) = d\theta\cos\theta$，$\sin\theta$ 的各个点的切线斜率的函数是 $\cos\theta$。

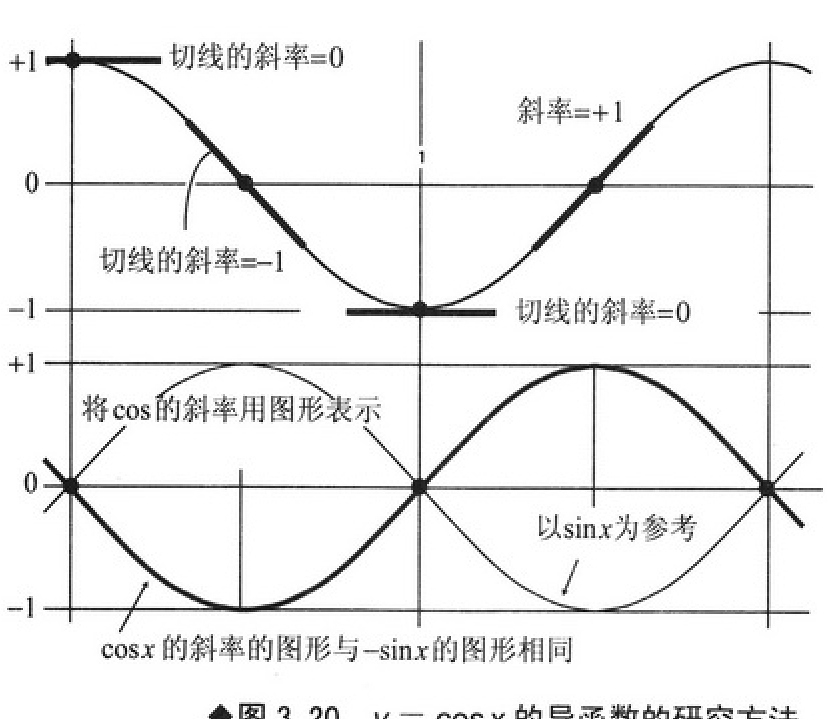
那么，来研究看 cos 函数的导函数是什么吧！

$y = \cos x$ 中，当 $x = 0$ 时，切线斜率为 0，随着 x 增大，切线斜率变成负的，倾斜程度越来越大，当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时最大，斜率为 -1，$x = \pi$ 时斜率为 0……，之后的变化是与之相同的增大过程。这个形状正好与 $y = \sin x$ 关于 x 轴的对称图形相同（图 3.19）。



◆图 3.19　cos 函数的导函数

也就是说，$y = \cos x$ 的导函数是 $-\sin x$。这里也用先前的图来研究一下，刚好将 x 与 y 互换一下，sin 与 cos 互换一下，不过，随着 θ 的增大，x 减小，需要加上一个负号（图 3.20）。



◆图 3.20　$y = \cos x$ 的导函数的研究方法

原来如此啊！ sin 与 cos 关系还真是好呢！

我们之间的关系也要一直很好啊！

那么，将这个关系用表达式表示：$(\cos x)' = -\sin x$，两边都添加一个负号……

$(-\cos x)' = \sin x$，sin 函数的原始函数，也就是积分以后的函数是负的余弦函数。

嗯，好混乱啊！

确实有点乱，那么整理一下三角函数的微分和积分……

$(\sin x)' = \cos x$ …… $\sin x$ 进行微分得到 $\cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$ …… $\cos x$进行微分得到 $-\sin x$

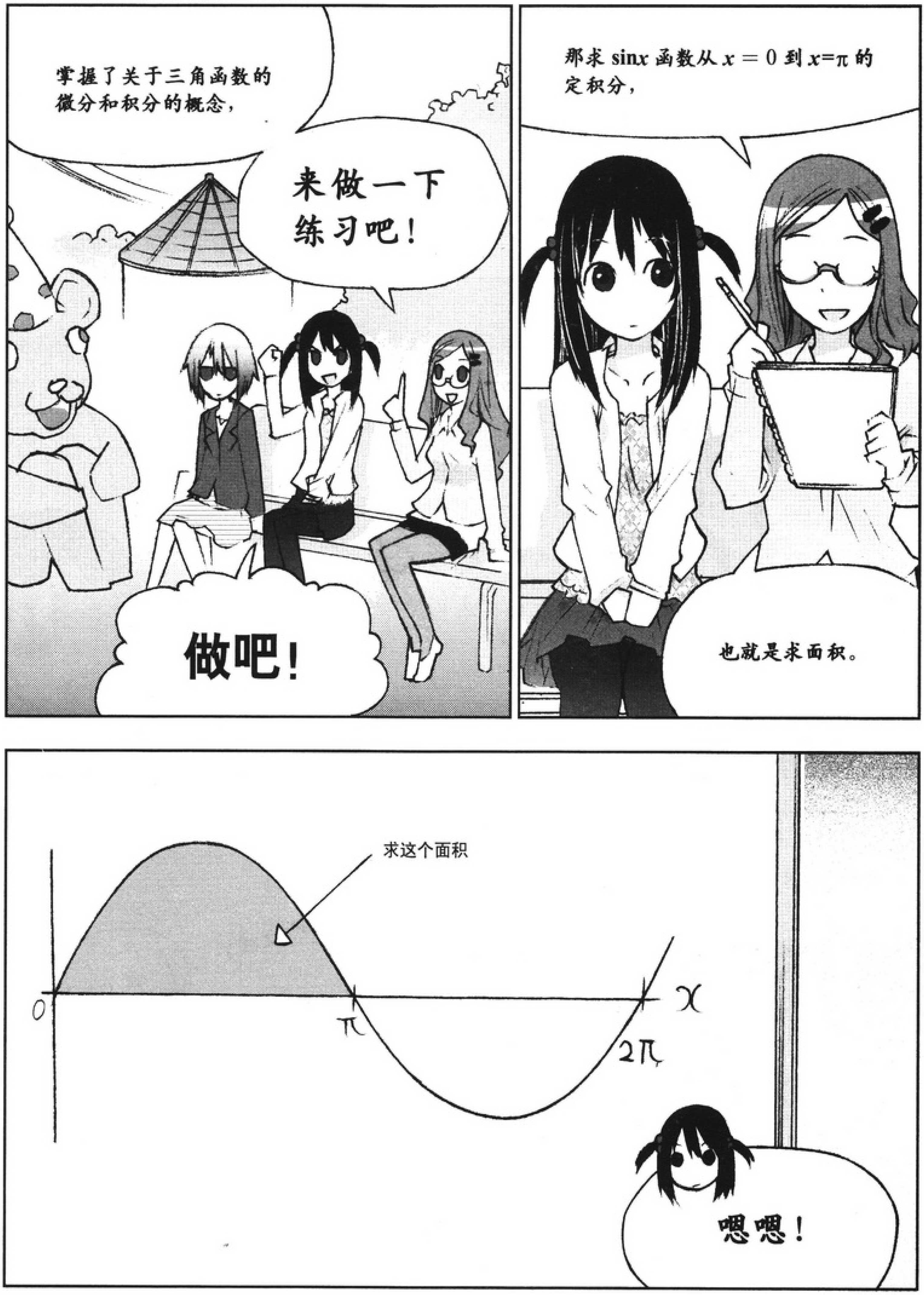
$\int \sin x dx = -\cos x$ …… $\sin x$ 进行积分得到 $-\cos x$

$\int \cos x dx = \sin x$ …… $\cos x$进行积分得到 $\sin x$

对照着图一起看，很快就明白了。

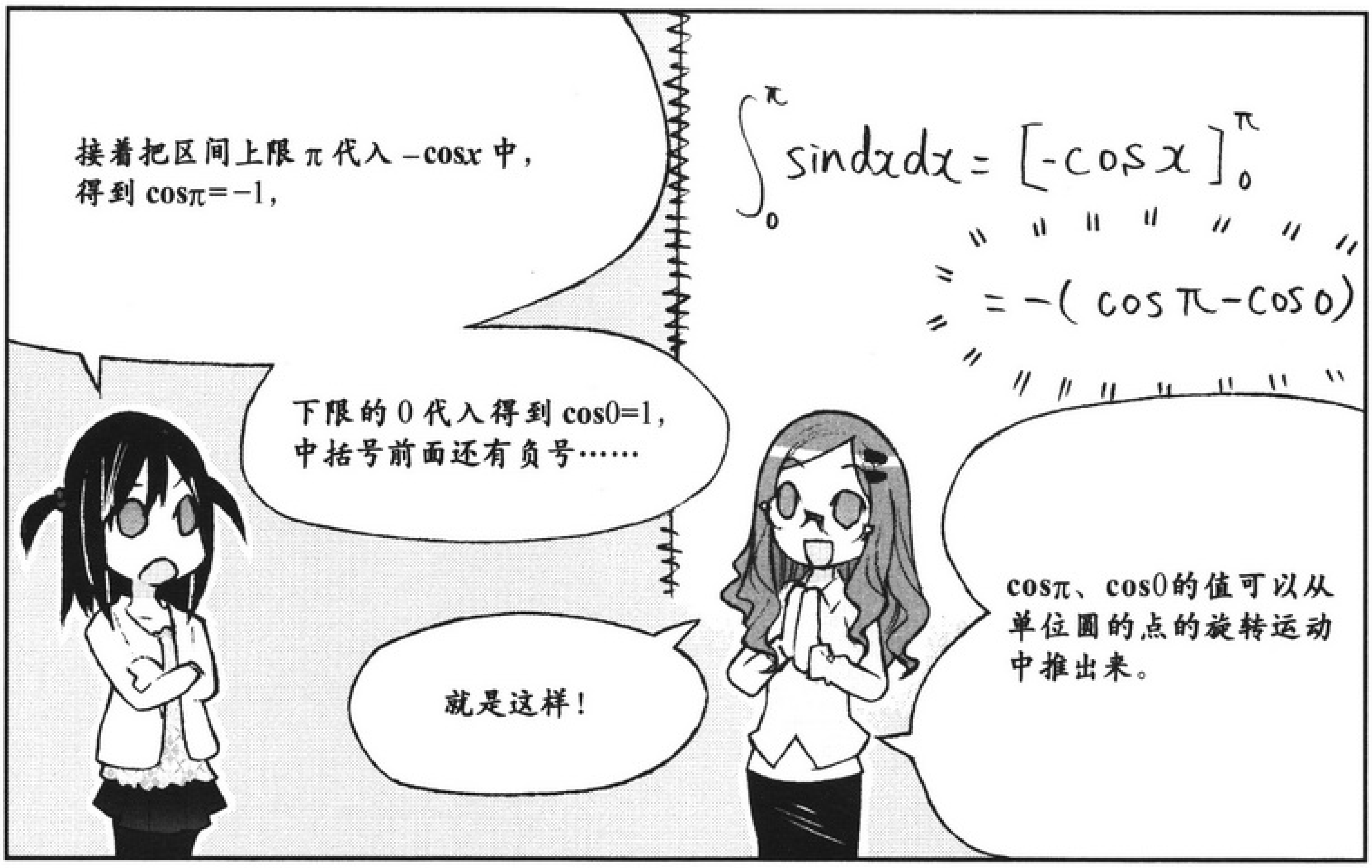
哦！这样就清楚了！能与图一起表示的话，就很容易明白了！

9. 三角函数的定积分

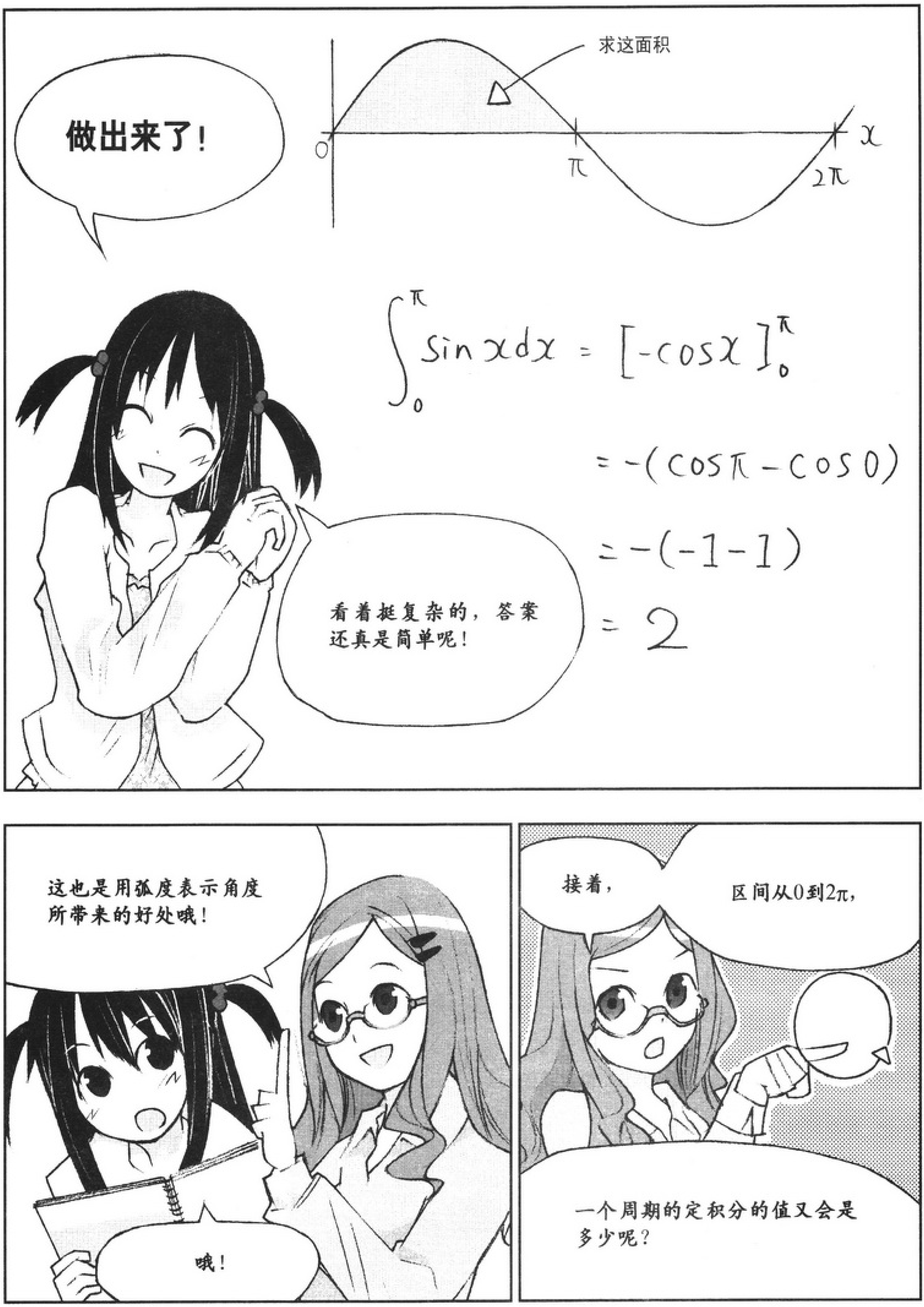


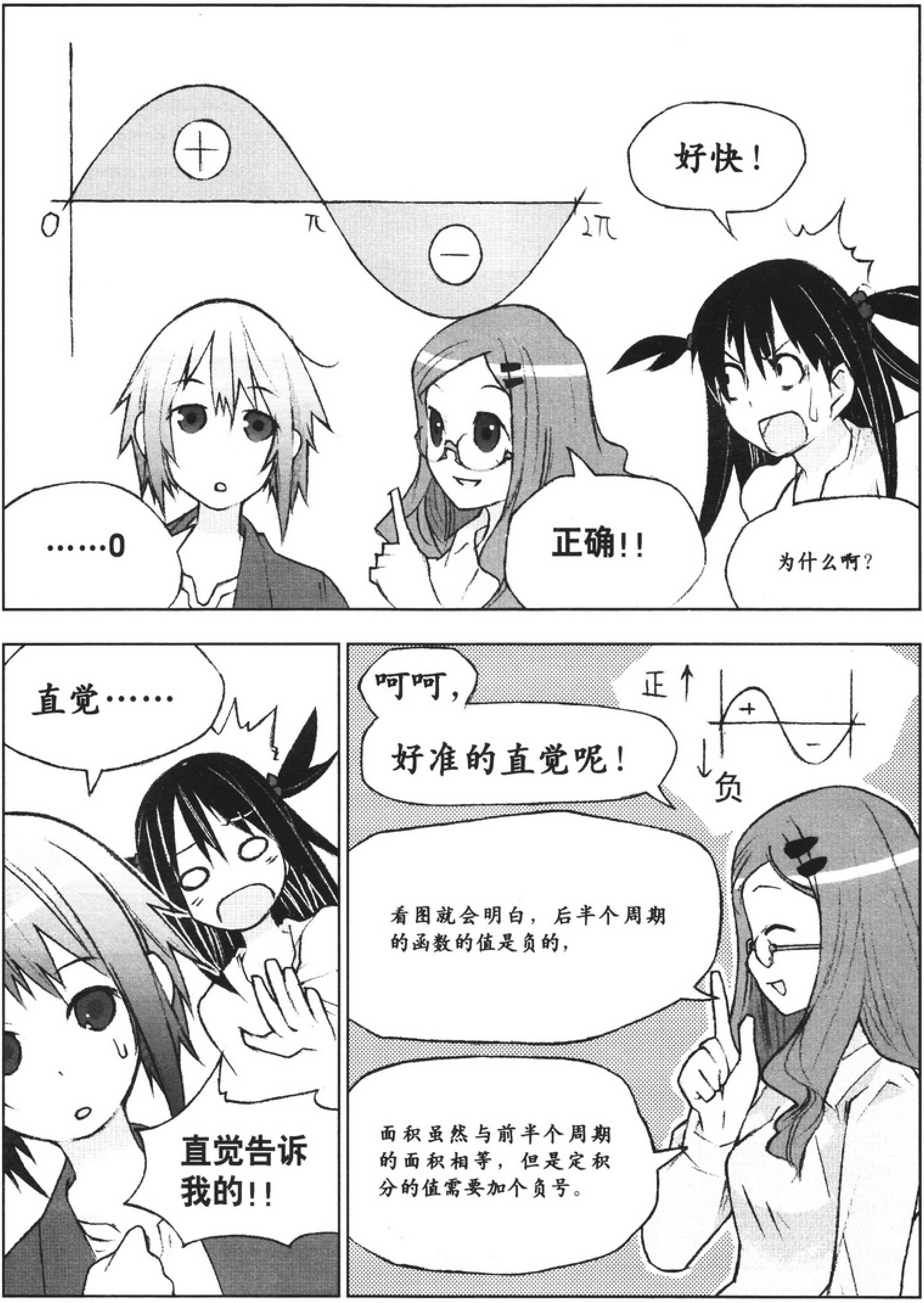
掌握了关于三角函数的微分和积分的概念，
来做一下练习吧！
做吧！
那求 $\sin x$ 函数从 $x=0$ 到 $x=\pi$ 的定积分，
也就是求面积。
求这个面积
0
π
2π
x
嗯嗯！

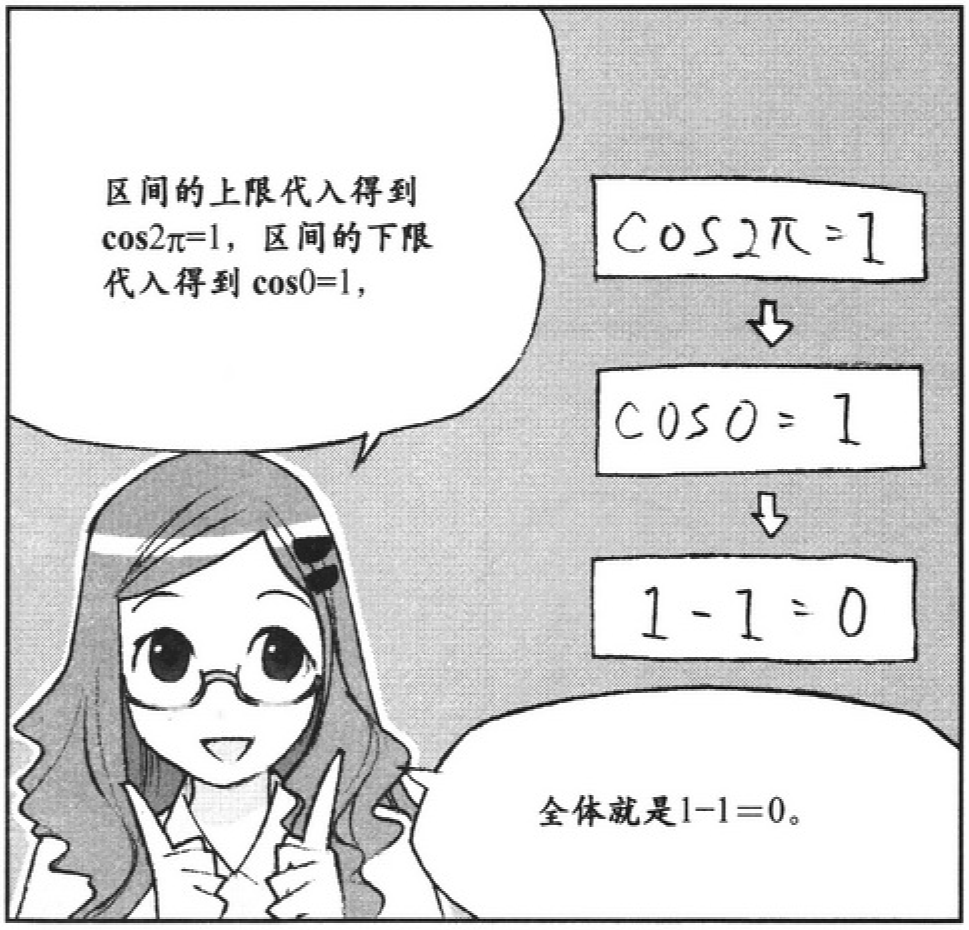
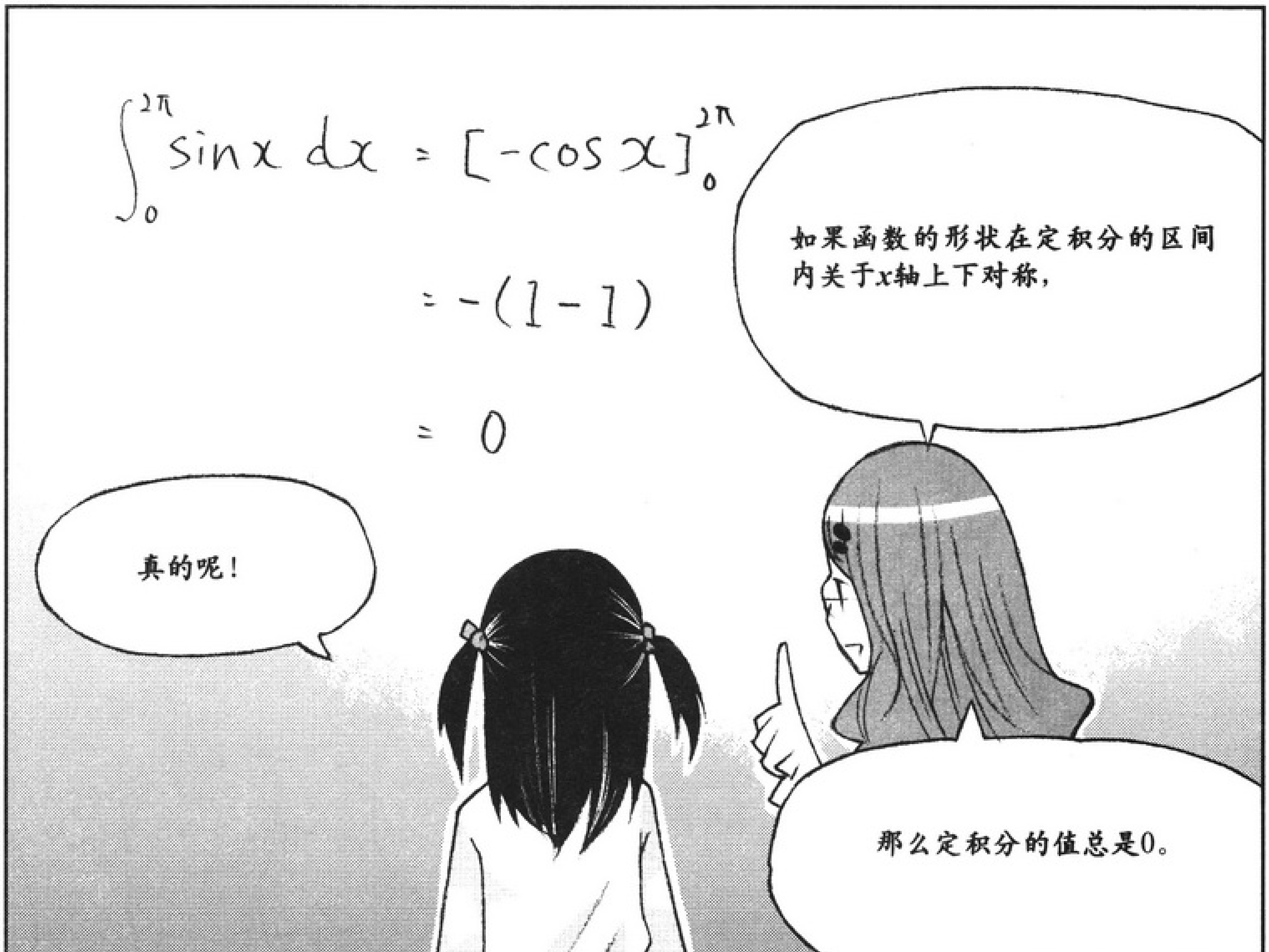
记住之前的公式……
$\int \sin x \, dx = -\cos x$
把积分区间代入里面看看。
呃，
左边的表达式是对$\sin x$从$x=0$到$x=\pi$的区间进行积分的意思，
$\int_0^\pi \sin x \, dx$
那么就是这样了！
右边的计算步骤，
中括号里的$-\cos x$和积分区间……
$\int_0^\pi \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi$
$-\cos x$是$\sin x$的原始函数呢！


接着把区间上限π代入－cosx中，得到cosπ=－1，
$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi}$
$= -(\cos\pi - \cos 0)$
下限的0代入得到cos0=1，中括号前面还有负号……
cosπ、cos0的值可以从单位圆的点的旋转运动中推出来。
就是这样！


cosπ是180°，等于－1。
$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi}$
$= -(\cos\pi - \cos 0)$
$= -(-1-1)$
cos0等于1……
答案是2！
对！


做出来了！
求这面积
0
π
2π
x
$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi}$
$= -(\cos\pi - \cos 0)$
$= -(-1-1)$
$= 2$
看着挺复杂的，答案还真是简单呢！
这也是用弧度表示角度所带来的好处哦！
哦！
接着，
区间从0到2π，
一个周期的定积分的值又会是多少呢？

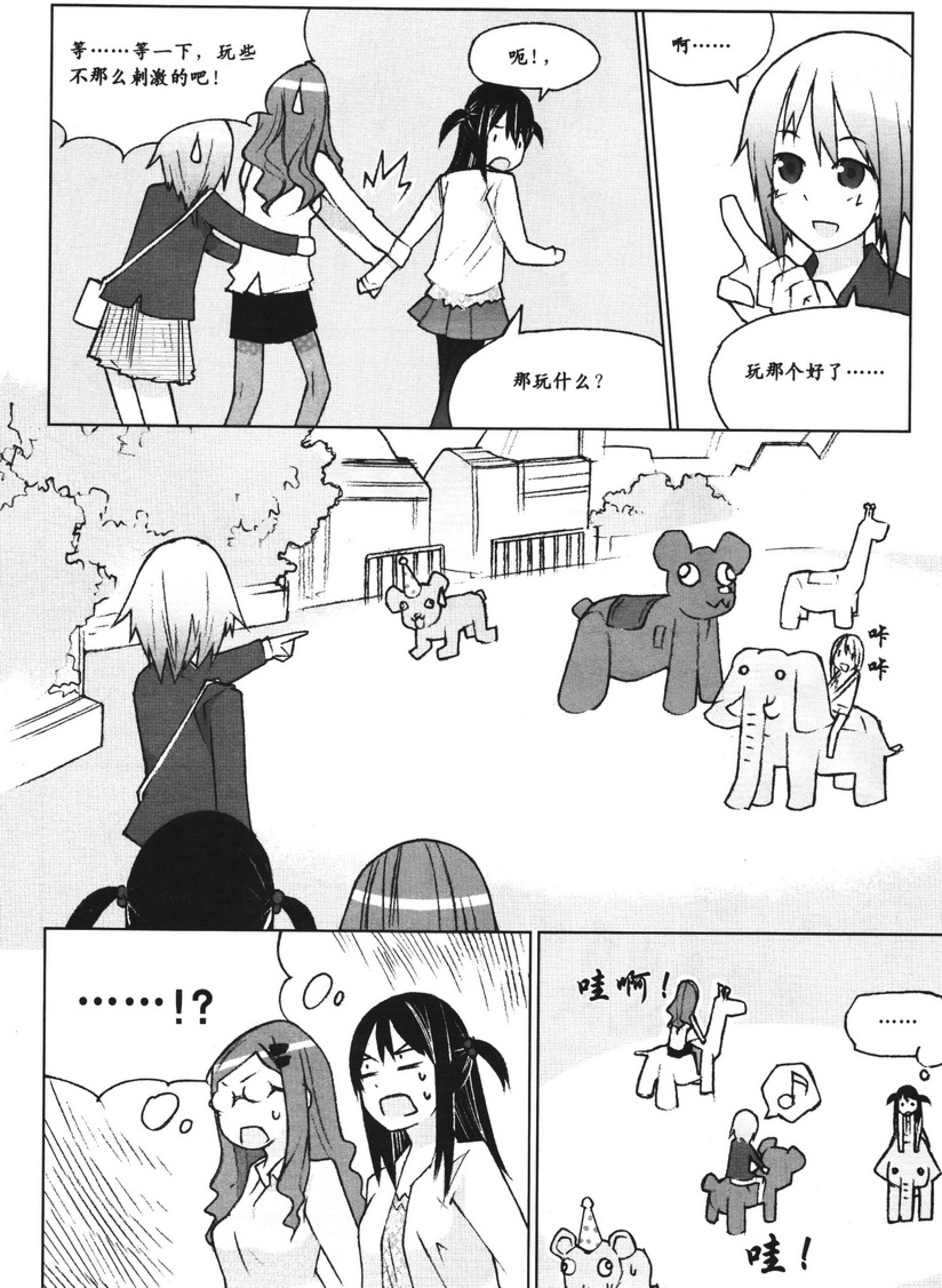

0
π
2π
好快！
……0
正确!!
为什么啊？
直觉……
呵呵，
好准的直觉呢！
正
负
看图就会明白，后半个周期的函数的值是负的，
直觉告诉我的!!
面积虽然与前半个周期的面积相等，但是定积分的值需要加个负号。


以防出错，把上限2π和下限0代进来，
计算一下。

区间的上限代入得到cos2π=1，区间的下限代入得到cos0=1，
cos2π=1
cos0=1
1-1=0
全体就是1−1=0。

$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{2\pi}$
$= -(1-1)$
$= 0$
如果函数的形状在定积分的区间内关于x轴上下对称，
真的呢！
那么定积分的值总是0。


再举个余弦函数的例子看一下吧，
y
cosx
x
0
例如，cos$x$从0到π区间的定积分。
y
cosx
+
-
x
0
π
对称
这个图形也是关于x轴上下对称，从图形上就可以看出积分值等于0呢！
明白了，也是0！
刚才绘里奈已经说了……
那来计算计算，看一下吧！
cos$x$的原始函数是sin$x$。
像上个例子一样，把上限π和下限0代入得到：sinπ−(sin0)=0−0=0。


$\int_0^\pi \cos x\,dx = [\sin x]_0^\pi$
$= 0 - 0$
$= 0$
哦！
这么快就解出来了！
关于sin*x*和cos*x*的不定积分的原始函数及其定积分的概念已经掌握了吧？
嗯！
像这样逐渐掌握了概念，我不会放弃数学的！
从数学考了32分的文香那听到这样的话，
うるうる
我很感动啊！


好！
照这样学，下次数学考试肯定没有问题！
在这之前，
我们今天要玩得更开心吧！
对啊！
啊，
接下来玩那个吧！
ギェー
ギャー
ゴゴゴゴゴ
超级刺激！
超级自由落体
直下地狱
ゴゴゴゴゴ
……
书籍扫描：铜板+西瓜


等……等一下，玩些
不那么刺激的吧！
呃！，
那玩什么？
啊……
玩那个好了……
咔
咔
……!?
哇啊！
……
哇！

第 4 章

函数的四则运算

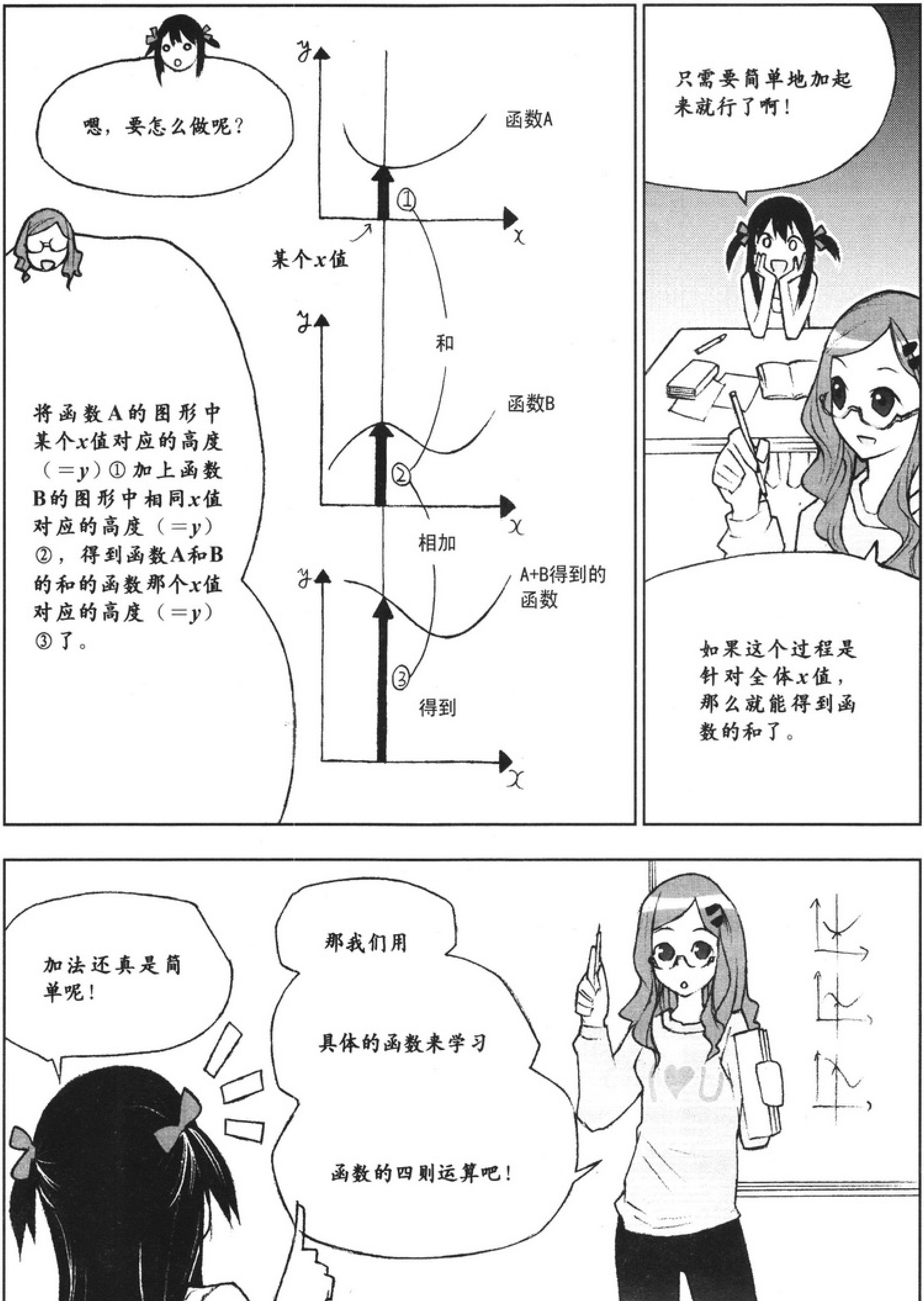
1. 函数的和


努力的话还是能学好的嘛！
不愧是妈妈的女儿！
是吧！
现在参加乐队练习也可以了吧！
太好了！
ララ
尽情地去吧！
パリーン
这个冲动劲也跟妈妈很像呢！
ピキッ
ガタッ

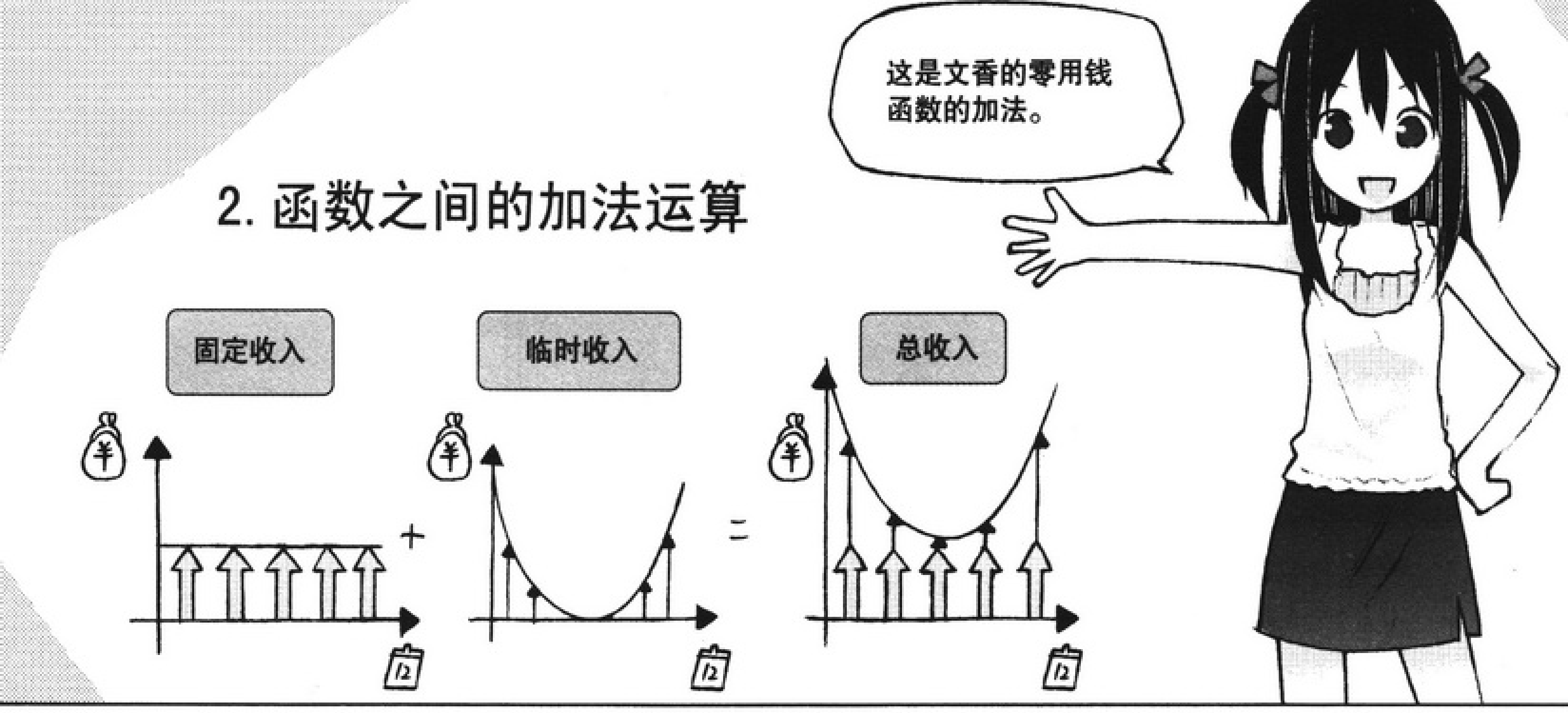

现在也可以毫无顾虑地参加乐队了！
到现在为止也没什么需要顾虑的……
忘了问了，铃考得怎么样啊！？
刷
80
パタン
呼
……

那么，
今天学什么？
ぐりぐり
不……不管怎么说，你们两个都对数学产生了兴趣就很好了。
バチバチバチ
今天学习函数的四则运算。
也就是函数之间的加法、
减法
乘法
除法运算，
フムフム
只是现在不讲除法运算。


函数的四则运算与波形的合成有直接的关系，
加油学习吧！
好！
首先，为了掌握相关概念，
我们先讲函数之和的例子。
好！请多多指教！
假如，
有这样的函数A和函数B，
想一下二者相加的和。
y
函数A
x
y
函数B
x



嗯，要怎么做呢？
函数A
某个x值
和
函数B
相加
A+B得到的函数
得到
将函数A的图形中某个x值对应的高度（=y）①加上函数B的图形中相同x值对应的高度（=y）②，得到函数A和B的和的函数那个x值对应的高度（=y）③了。
只需要简单地加起来就行了啊！
如果这个过程是针对全体x值，那么就能得到函数的和了。
加法还真是简单呢！
那我们用
具体的函数来学习
函数的四则运算吧！



那么，我们用具体的函数来演示一下刚才讲的函数的加法运算吧！

好！

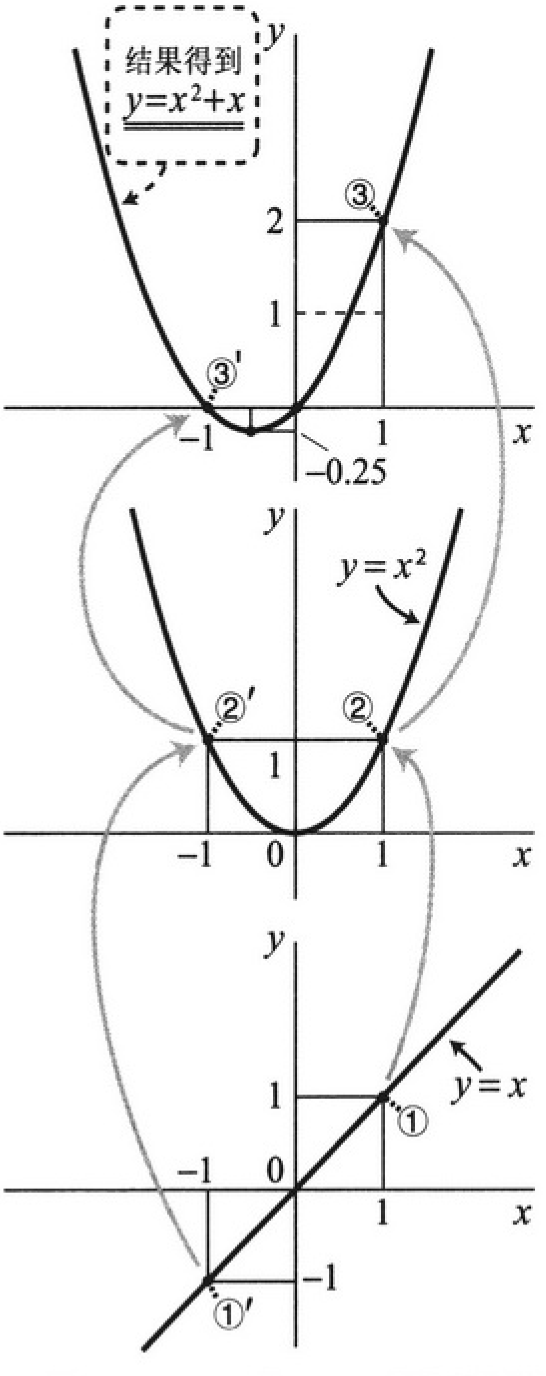
现在看一下这样两个函数：$y=x^2$ 和 $y=x$。要求出所有 x 值对应的 y 值是不可能的，那么计算某个区间的值来看看吧。

嗯，嗯！

首先看函数结果对应的图形吧。注意一下，在这里，最上面的图是函数相加结果得到的函数图，中间的是 $y=x^2$ 的图形，最下面的是 $y=x$ 的图形。

来确认一下计算顺序。首先看点 $x=1$，将 $x=1$ 代入 $y=x^2$ 中结果为 $y=1$（①），再将 $x=1$ 代入 $y=x$ 中得到 $y=1$（②）。接着，将①和②加起来得到 $1+1=2$，加法运算得到的函数值为 2（③）。

就是这样啊……



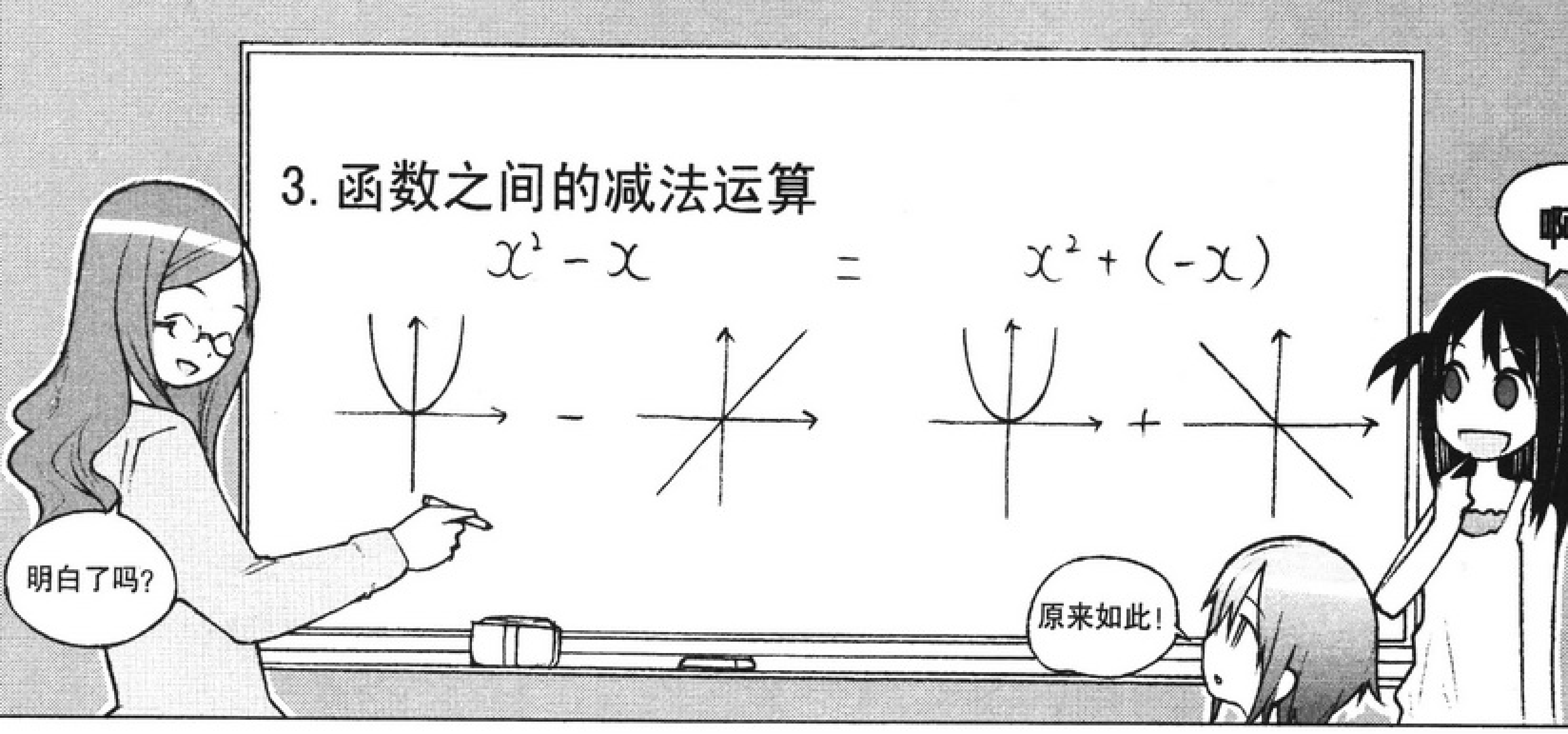
◆图 4.1　$y=x^2$ 和 $y=x$ 的加法运算


简单吧？接下来，看一下 $x=0$ 时的结果吧，这时两个函数的值都是 0，那么加法运算的结果也是 0。

再来看一个 x 值，计算 $x=-1$ 时的结果，将 $x=-1$ 代入 $y=x^2$ 中结果为 $y=1$（①），再将 $x=-1$ 代入 $y=x$ 中得到 $y=-1$（②）。接着，将①和②加起来得到 $1+(-1)=0$，加法运算得到的函数值为 0（③）。


像这样计算 x 值对应的函数值，能画出 $y=x^2$ 与 $y=x$ 的和的图像……


就是这样呢！这种函数之间的加法运算，可以先将函数加起来，也就是，函数 $y=x^2$ 和 $y=x$ 相加能得到 $y=x^2+x$。



这次还是采用与上一节相同的两个函数 $y=x^2$ 和 $y=x$，来学习函数之间的减法。也就是，求 $y=x^2$ 中减去 $y=x$ 而得到的函数。

与加法不同，感觉好难啊！

的确是这样，那么将减法转换成加法怎么样？

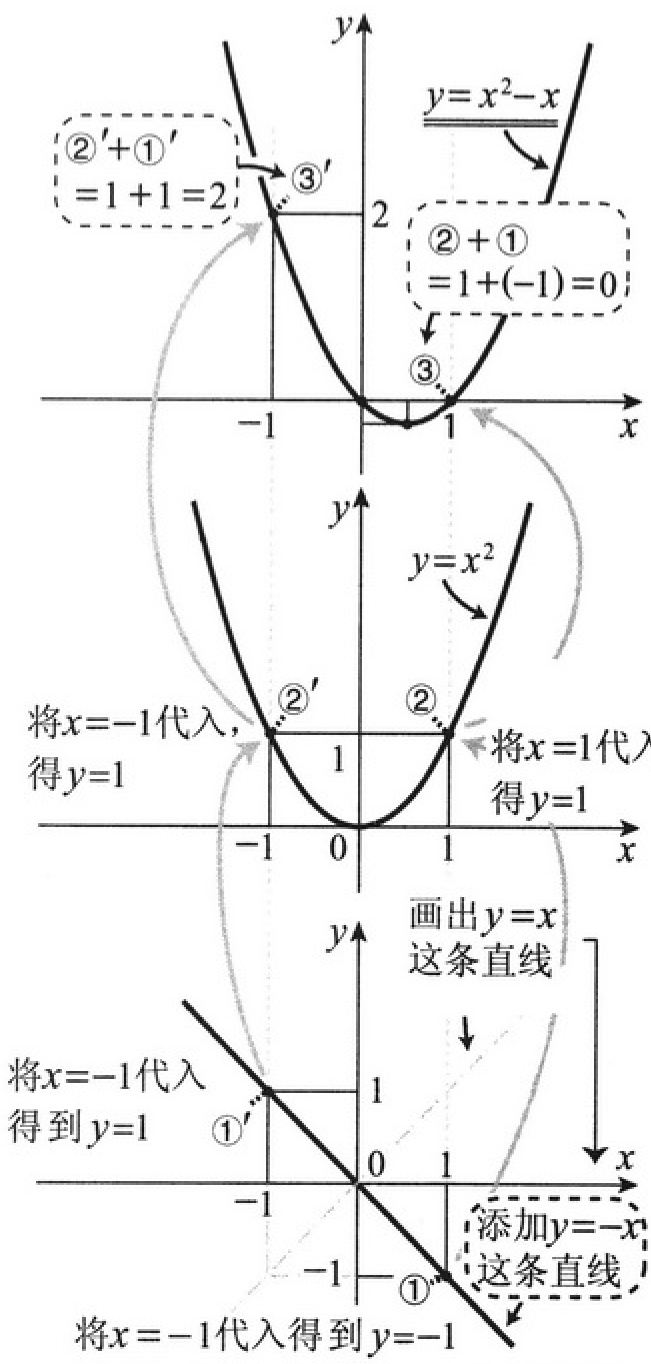
呃!？这是怎么回事？

减法可以看作是“被减函数带有减法运算符号的加法运算”。1－1与1＋（－1）的结果都是0。函数的应用场合和理论都相同。只不过要记住，减法运算中被减函数的符号与加法运算中的那个函数的符号相反。

原来是这样啊！

这里也先看图形吧（图4.2）！

将 $y=x$ 变成 $y=-x$，然后与 $y=x^2$ 相



◆图 4.2 $y=x^2$ 和 $y=x$ 的减法运算

加呢！

对，就是这样！像之前的计算一样，将几个 x 值代入计算看看。

首先，看点 $x=1$，同样将 $x=1$ 代入 $y=-x$，得到 $y=-1$（①），再将 $x=1$ 代入 $y=x^2$ 中得到 $y=1$（②）。接着，将①和②加起来得到 $1+(-1)=0$，加法运算得到的函数值为 0（③）。

原来如此！

接下来，计算 $x=0$ 时的值，两个函数的值都是 0，那么加起来的结果也是 0。还有 $x=-1$ 时的值，同样将 $x=-1$ 代入 $y=-x$，得到 $y=1$（①），再将 $x=-1$ 代入 $y=x^2$ 中得到 $y=1$（②）。接着，将①和②加起来得到 $1+1=2$，加法运算得到的函数值为 2（③）。

跟加法一样呢……

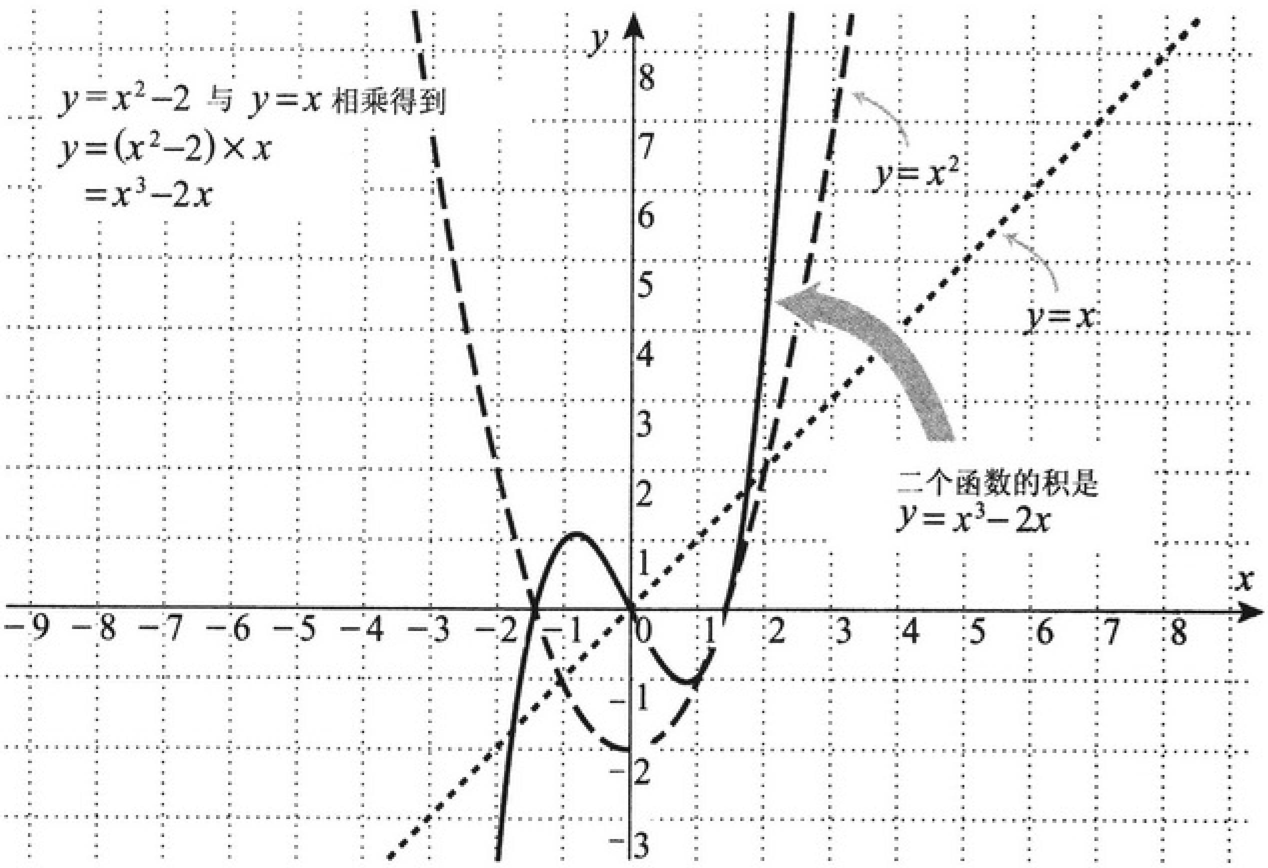
这样计算的话就不难了吧！ $y=x^2$ 和 $y=x$ 函数之间的减法运算，可以看作是 $y=x^2$ 加上 $y=-x$，即 $y=x^2+(-x)$，也就能得到 $y=x^2-x$。

4. 函数之间的乘法运算

接下来学习函数的积。函数的和其实就是“将某个 x 值对应的不同函数的值加起来就行了”，而函数的积也就是各个函数在同一个 x 对应的值相乘的计算结果。

思考的方法相同呢！

先来看一下比较简单的函数之间的乘法的例子吧！例如，函数 $y=x^2-2$ 与函数 $y=x$ 的乘法是这样的（图 4.3）。



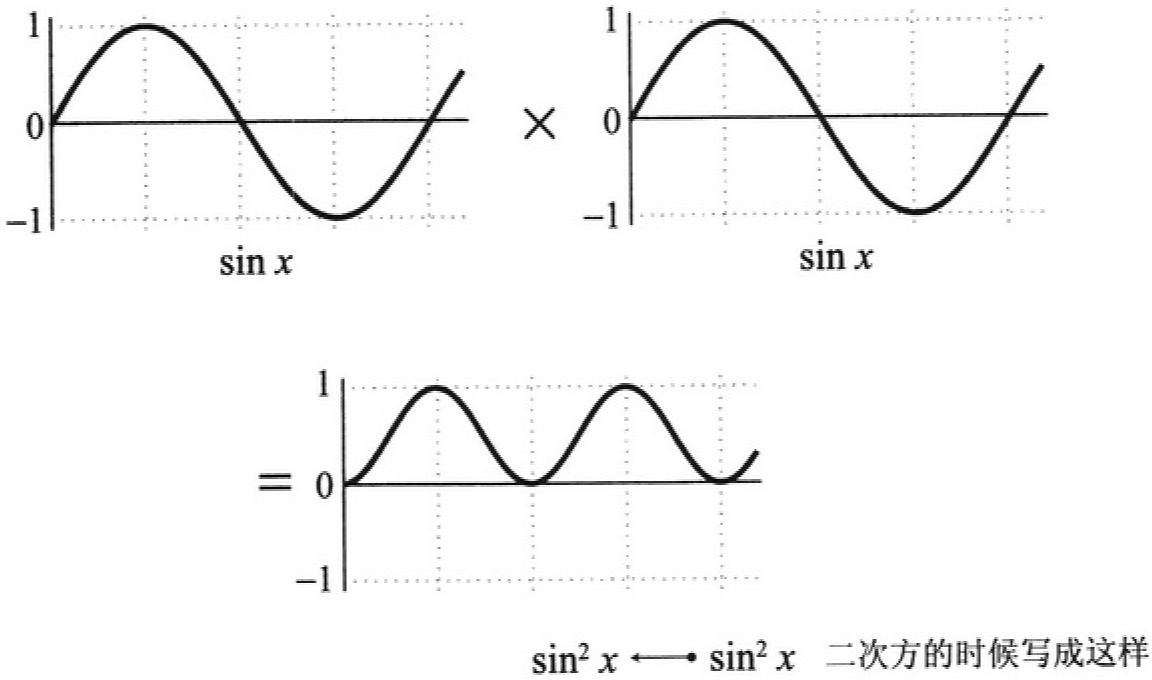
◆图 4.3　$y=x^2-2$ 和 $y=x$ 的积

变成了好奇妙的图形啊！

这样比较简单的函数，乘法运算的结果是 $y=(x^2-2)\times x$ 也就是得到函数 $y=x^3-2x$。

那复杂的函数是怎样的……？

对啊，三角函数之间的乘法运算就有点复杂了。来看具体的问题吧，例如，试着将 $y=\sin x$ 与同一函数 $y=\sin x$ 相乘，结果变成这样了（图 4.4）。



◆图 4.4　$y=\sin x$ 与 $y=\sin x$ 的积

$y=\sin x$ 与 $y=\sin x$ 相乘，$y=\sin x\times\sin x$，也就是变成了 $\sin x$ 的二次方，$y=(\sin x)^2$，这个函数可以写成 $y=\sin^2 x$。

图 4.4 中 $y=\sin x$ 图形后半个周期的“凹”变成了“凸”了呢！

凹变成了凸……

这是为什么呢？

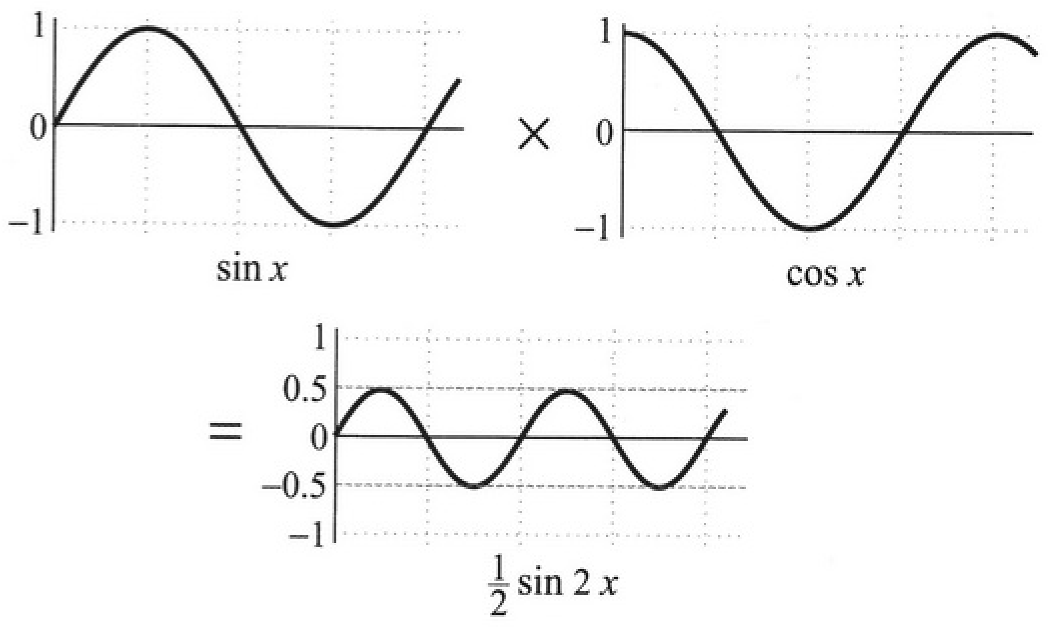
两个负号相乘的话……

就变成正号了！

对！两个负数相乘会得到一个正数。看 sin$x$ 与 sin$x$ 的积的函数的图形，频率（波峰、波谷出现的次数）变成了原来的两倍；振幅（也就是波峰与波谷的高度差）变成了原来的一半，而且 y 值向上移动了 1/2。

哦！

接下来，再看一个三角函数之间的积的例子，来看看 y=sin$x$ 与 y=cos$x$ 的乘积的图形（图 4.5）。



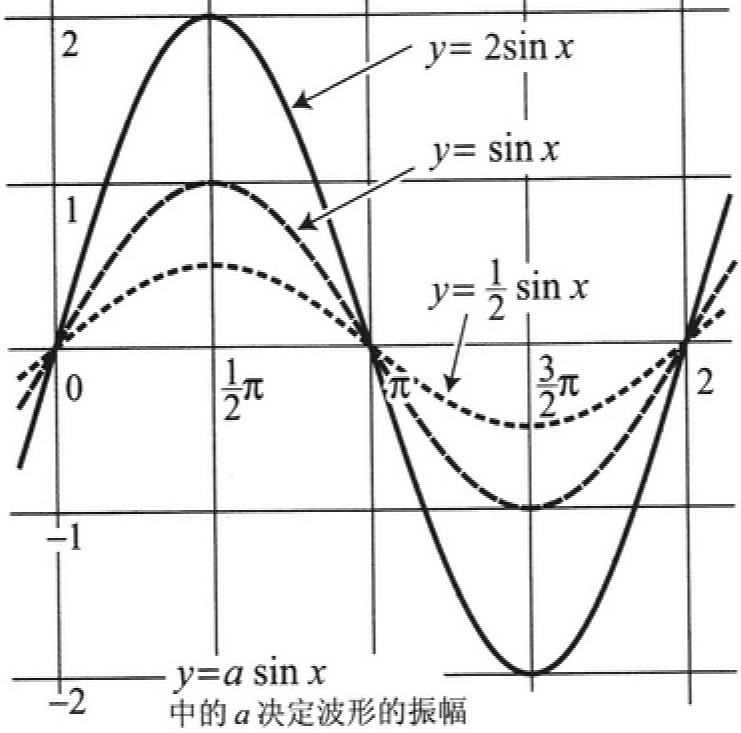
◆图 4.5　y = sin$x$ 与 y = cos$x$ 的积

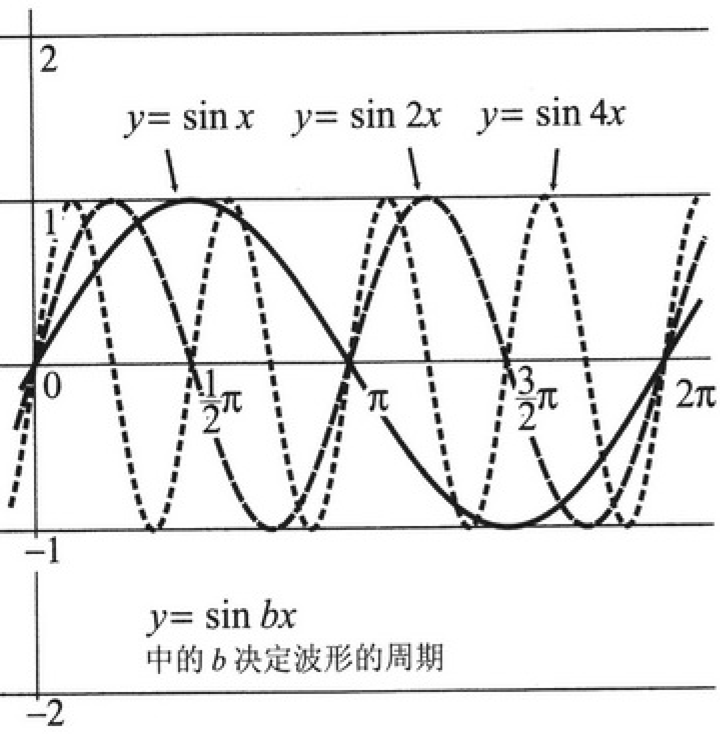
呃……，　y=sin$x$ 与 y=cos x 的乘积是 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$。

看这个积的函数，频率是原来函数的两倍，振幅是原来的一半，高度值不沿 y 轴移动，振幅还是以 0 为中心线。反过来研究，得到的图形的频率是 y = sin$x$ 的频率的 2 倍，那么在 x 之间添加一个 2，振幅是 y = sin$x$ 的一半，那么在 sin 前面添加一个 1/2，从而得到 $\frac{1}{2}\sin 2x$。

哦……

表达式中 sin 前面和后面的数字在图形中都有一定的意义吧？总结一下得到这样的结果（图 4.6）。





◆图 4.6　sin 前面和后面的数字与波形的关系

sin 函数的振幅随 sin 前面的数值变化，而它的周期随 sin 后面的数值变化。

到现在为止采用的方法都是，将某个函数中许多 x 值对应的函数值与其他函数的这

些 x 值对应的函数值相加相减求得结果，然后将结果画在图形中。然后根据图形推导出结果函数的表达式。然而，按照这种方法做了就会知道，它很费时间，一点也不巧妙。因此应该利用公式。例如，教科书中就应该写出了这样的公式……

正弦的加法定理：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

余弦的加法定理：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

嗯，教科书上有！有！

我们将傅里叶变换中的必要知识浓缩后加以说明，因此在这里就不解释提及的数学公式的证明过程和意义了。

将“正弦函数的加法定理”和“余弦函数的加法定理”结合起来使用，能推导出求三角函数的“积化和差公式”和“和差化积公式”。

积化和差公式：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

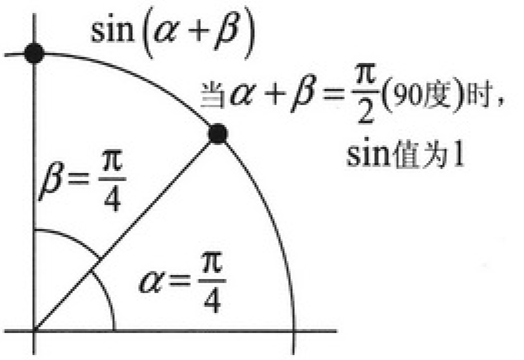
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

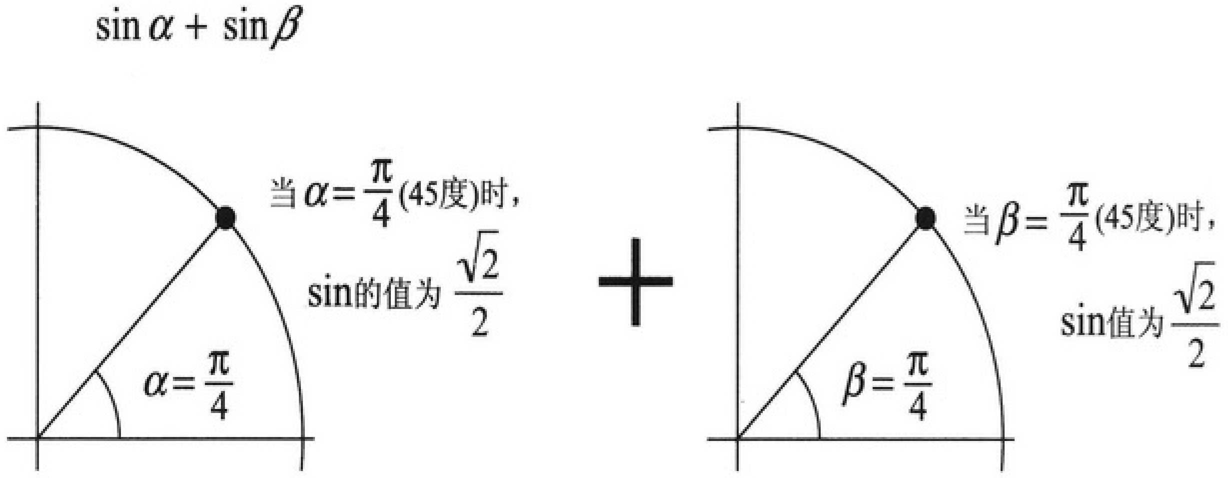
$\sin(\alpha+\beta)$与$\sin\alpha+\sin\beta$不同，这是为什么？

$\sin(\alpha+\beta)$是对角度α与角度β的和求sin值，$\sin\alpha+\sin\beta$是对角度α和角度β各自求sin值后再相加。例如，$\sin(\alpha+\beta)$当$\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$（＝45度）时，有$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$（图4.7）。



◆图 4.7　$\sin(\alpha+\beta)$ 的图象

而$\sin\alpha+\sin\beta$当$\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$（＝45度）时，有$\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=1.4142$（图4.8）。



$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=1.4142\cdots$$

◆图 4.8　$\sin\alpha+\sin\beta$ 的图象

但是，计算好麻烦啊！

如果记住了，以后画图的时候就很轻松了！

轻松？这样的话就太好了！！

单纯……

检测一下这些公式，使用这些公式计算之前 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的积的表达式。

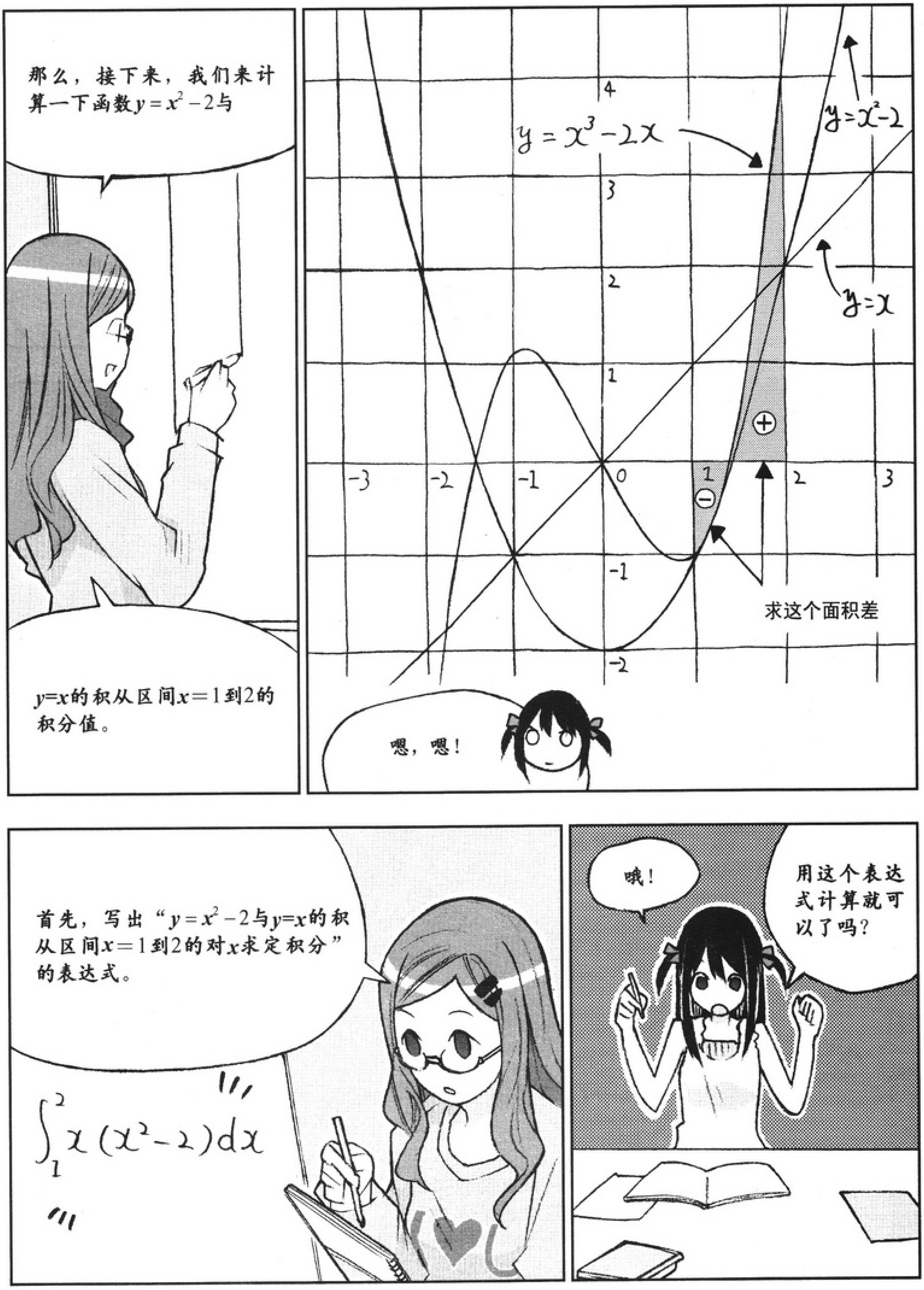
使用的公式是$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$，这里将 $\alpha=x$ 与 $\beta=x$ 代入得到

$\sin x\cos x = \frac{1}{2}[\sin(x+x)+\sin(x-x)] = \frac{1}{2}\sin 2x$，迅速求出了答案。

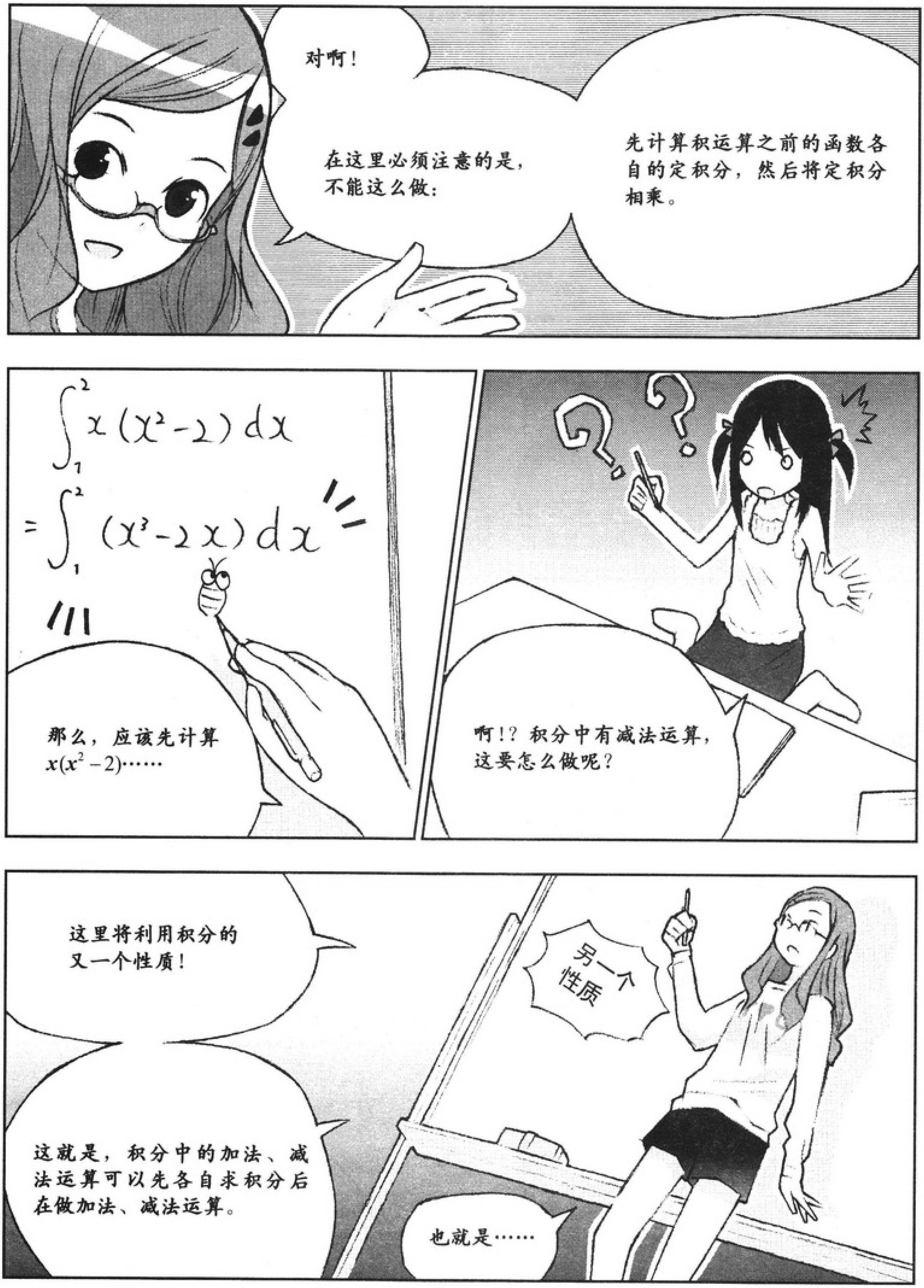
好！

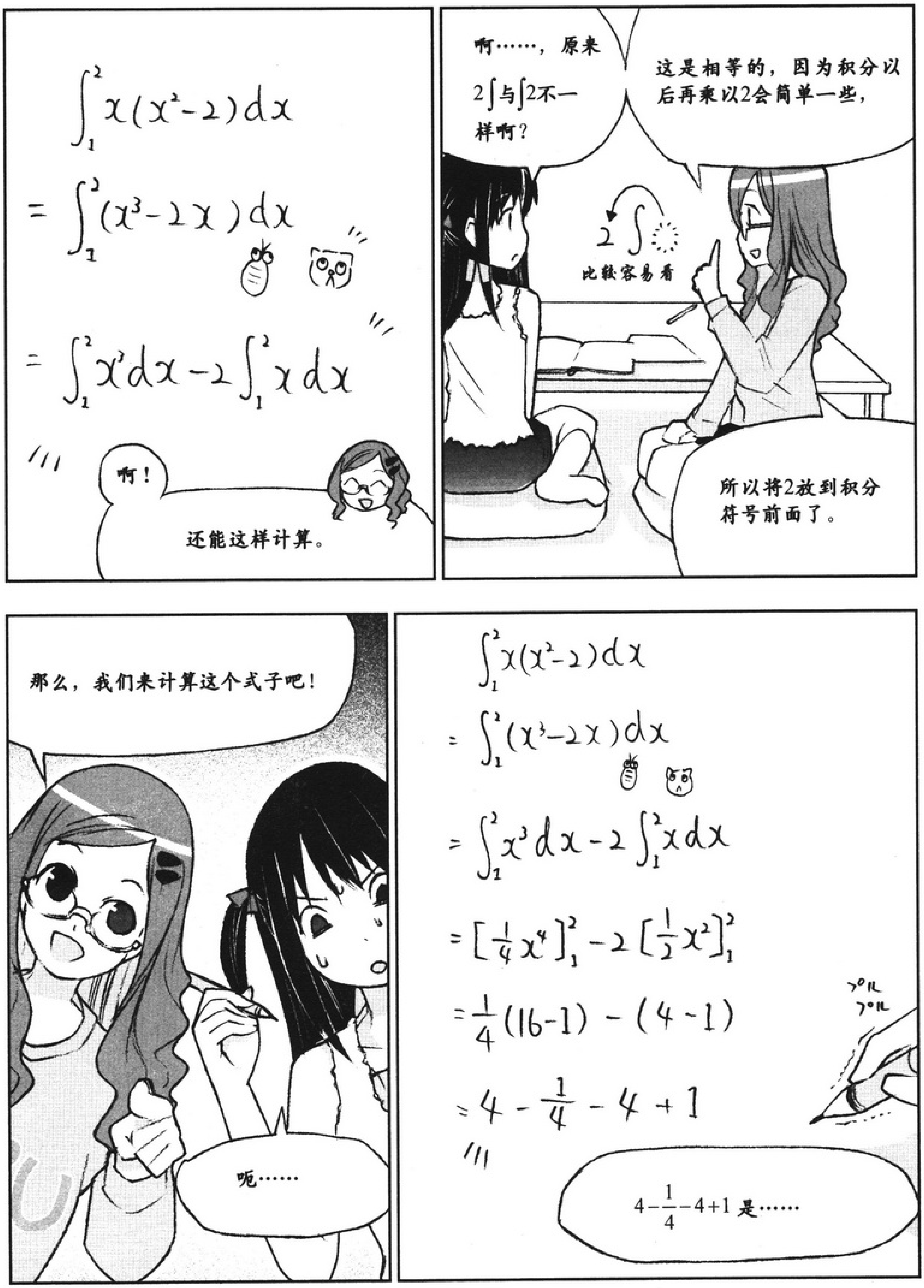
5. 函数的积与定积分

这样应该就能求出函数的积了。
来做一下函数的积与定积分的结合的计算吧！
呃，
为什么要这么做呢？
下一章要讲函数的正交，这是为此做的准备。
哦！
现在我们处于将拼图的组成块一个一个的拼在一起的状态，
好！
将组成块全部拼好了后就能看到整体图形了，所以不用担心，安心学习吧！



那么，接下来，我们来计算一下函数$y=x^2-2$与
$y=x$的积从区间$x=1$到2的积分值。
$y=x^3-2x$
$y=x^2-2$
$y=x$
4
3
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
求这个面积差
嗯，嗯！
首先，写出“$y=x^2-2$与$y=x$的积从区间$x=1$到2的对x求定积分”的表达式。
$\int_1^2 x(x^2-2)dx$
哦！
用这个表达式计算就可以了吗？


对啊！
在这里必须注意的是，不能这么做：
先计算积运算之前的函数各自的定积分，然后将定积分相乘。
$\int_1^2 x(x^2-2)\,dx$
$=\int_1^2 (x^3-2x)\,dx$
那么，应该先计算$x(x^2-2)$……
啊！？积分中有减法运算，这要怎么做呢？
这里将利用积分的又一个性质！
另一个性质
这就是，积分中的加法、减法运算可以先各自求积分后在做加法、减法运算。
也就是……


$\int_1^2 x(x^2-2)dx$
$=\int_1^2 (x^3-2x)dx$
$=\int_1^2 x^3 dx - 2\int_1^2 x dx$
啊！
还能这样计算。
啊……，原来
2∫与∫2不一
样啊？
这是相等的，因为积分以
后再乘以2会简单一些，
2∫
比較容易看
所以将2放到积分
符号前面了。
那么，我们来计算这个式子吧！
呃……
$\int_1^2 x(x^2-2)dx$
$=\int_1^2 (x^3-2x)dx$
$=\int_1^2 x^3 dx - 2\int_1^2 x dx$
$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 - 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$
$=\frac{1}{4}(16-1)-(4-1)$
$=4-\frac{1}{4}-4+1$
$4-\frac{1}{4}-4+1$ 是……

$\frac{3}{4}$。
噢
很快算出来了呢！
你总是到了容易的地方才说话！
不过，
准确地计算出来了呢！
我努力了！


累了吗？
呼……
没有……
学到了一些数学知识是很高兴，但是主唱……
还没有找到呢……
在网上找找看吧。
上网发帖子找找看吧！
这……
就是啊！

第 5 章

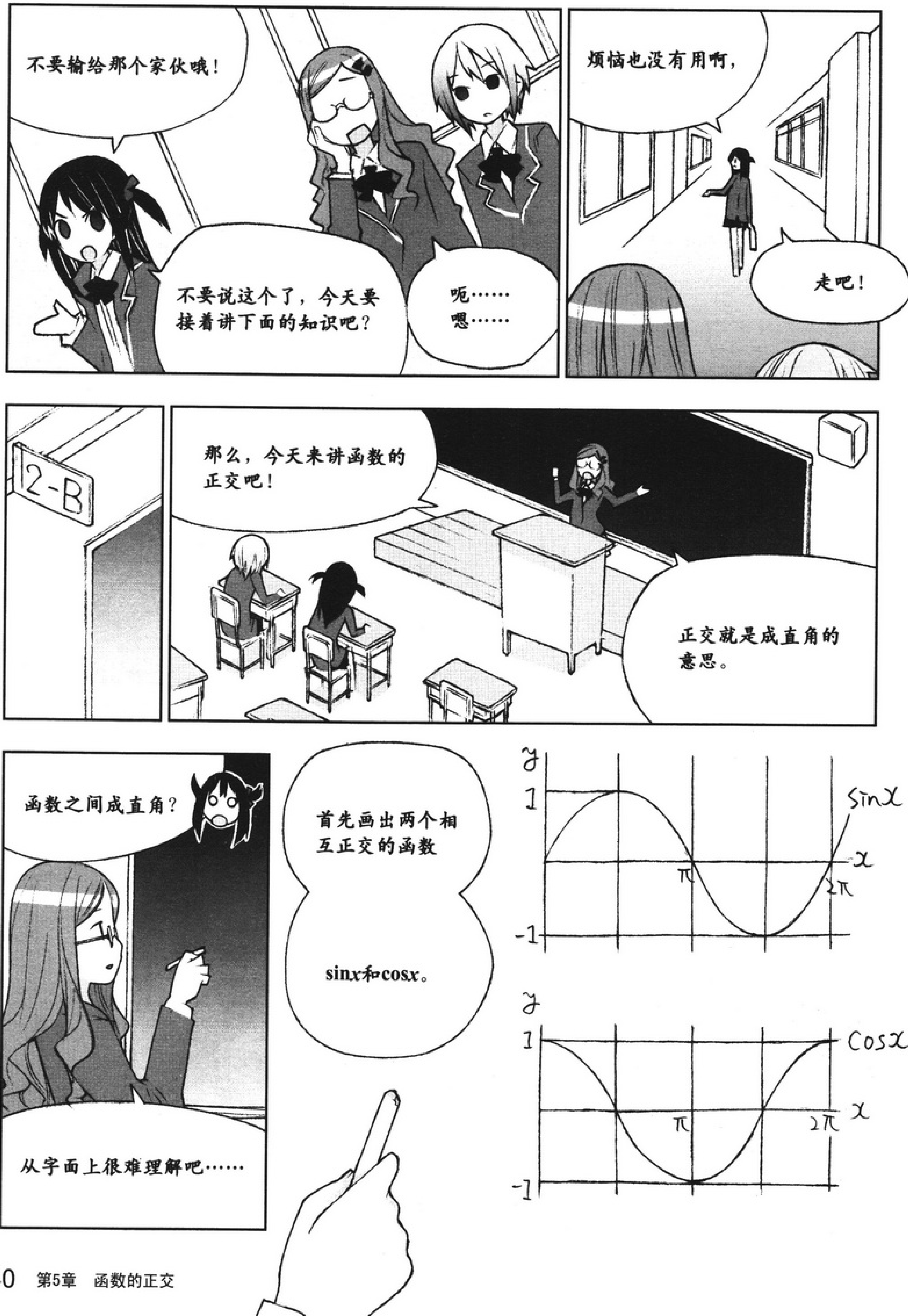
函数的正交

1. 函数的正交


根据规定，
文化节实况的裁判由8名学生和2名老师组成，
他们对各个乐队打分。
3
8
10
7
这……这怎么了？
排名第一的乐队能赢得最后的桂冠，
我们乐队当然是以此为目标的。
哇……
我们……是指……
如果，
我们乐队拿了第一，
自信满满啊！
那我们就这么决定了！
那就跟我交往吧！


没睡醒的话
就赶快去睡
觉吧！
我……
是认真的……！！
……
我也有个条件，如果
我们乐队赢了的话，
由希，你要帮我们拿
东西！
文香……！？
……明白了。

拿东西……！？
快点！
快点！
バチーン
啊！
我又不是
搬运工。
也不错……！
哈哈哈，
我同意了，
我很期待哦！
这样好吗？
哒
哒…
再见……
主唱还没有找到…



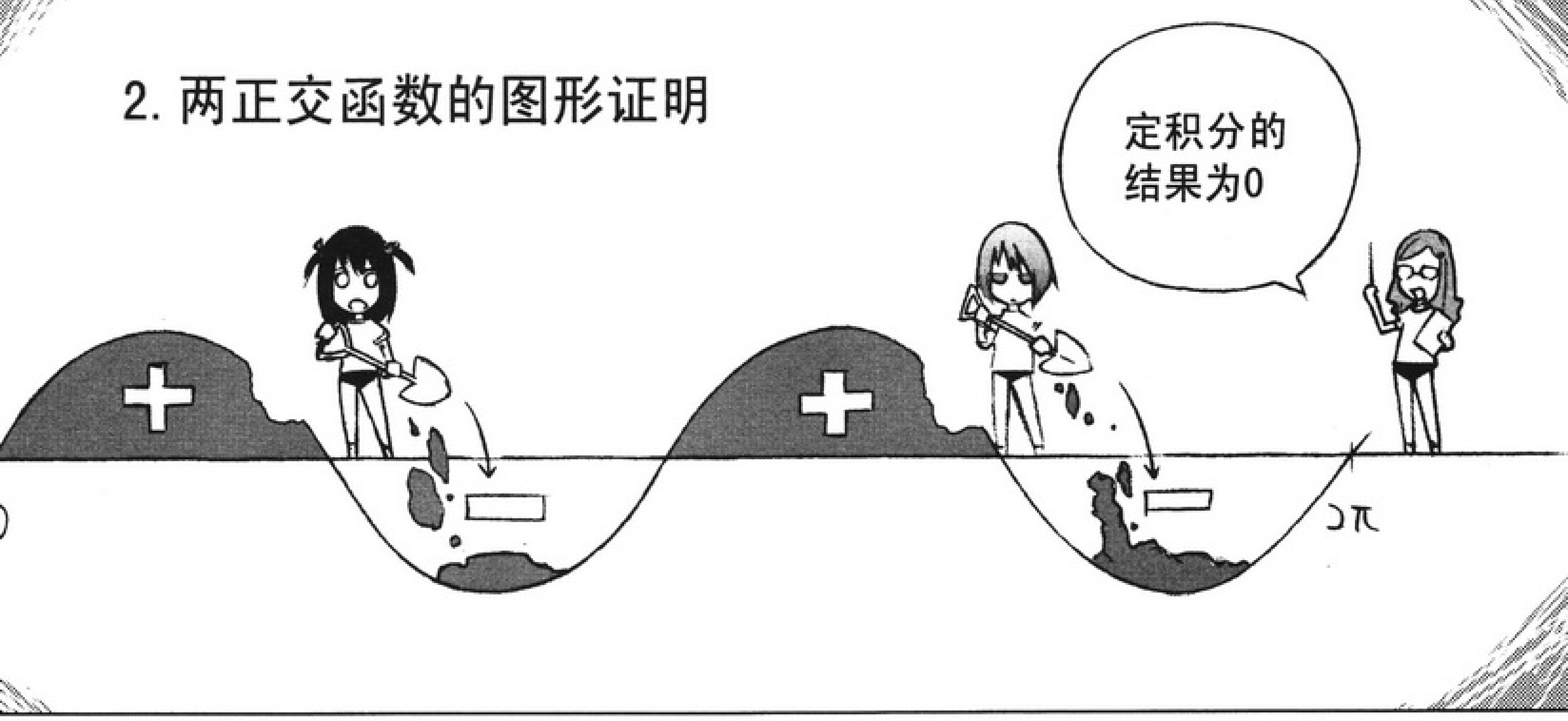
不要输给那个家伙哦！
不要说这个了，今天要接着讲下面的知识吧？
呃……
嗯……
烦恼也没有用啊，
走吧！
2-B
那么，今天来讲函数的正交吧！
正交就是成直角的意思。
函数之间成直角？
从字面上很难理解吧……
首先画出两个相互正交的函数
sinx和cosx。
y
1
sinx
x
π
2π
-1
y
1
cosx
x
π
2π
-1

$\sin x$函数的波形与$\cos x$函数的波形相差$\frac{\pi}{2}$。
啊！这哪有成直角啦？
请回忆一下前段时间在学校里讲三角函数的时候，
$\frac{\pi}{2}$ 在单位圆中正好对应90°的角度位置。
sinx
cosx
也就是，这两个函数的波形的起始点的位置关系，在单位圆上成直角。
以相同速度旋转的两个箭头($\sin x$与$\cos x$)成直角关系。
嗯嗯……

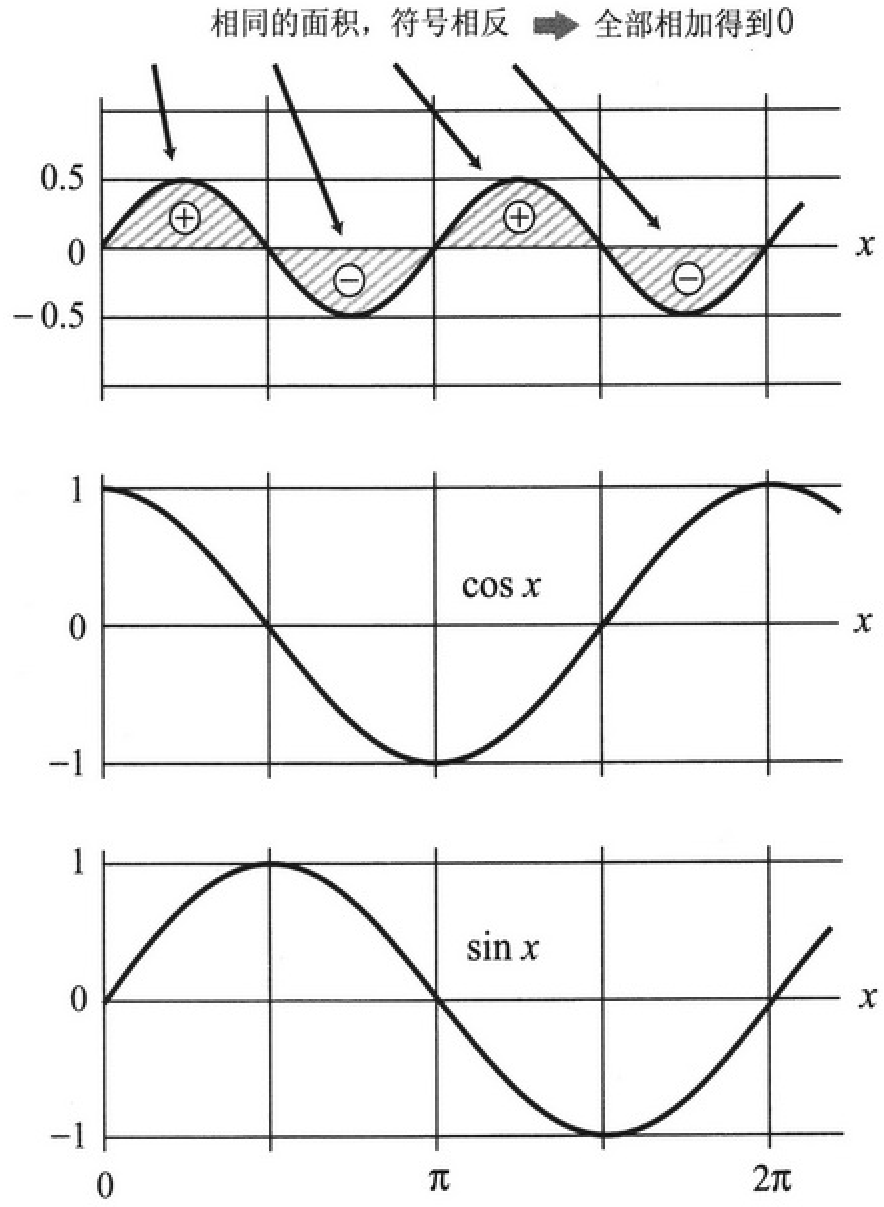

在圆周上的位置关系成90°（直角）的状态的时候称为正交关系。
90°
正交
并不等价
这并不一定很通俗易懂……
这与两条线夹角成的90度成为直角，
直角
正交
有点不一样，不要混淆了哦！
函数之间满足某个条件时它们表现出正交的关系，
这个条件就是之前讲过的“函数积的积分”。
这样啊……
如果函数成正交关系，那么它们的积的定积分为0。
呃……
……


反过来说，如果两个函数（例如，sin与cos）相乘的结果的定积分值为0，
那么称“这两个函数正交”。
$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$
成立
sinx与cosx正交
哦！原来是这样啊！
为此，
我们就先讲了函数的积与定积分呢！
接下来，我们看一下例题吧！

2. 两正交函数的图形证明



我们先来研究一下之前讲过的 sin$x$ 与 cos$x$ 的例子吧。首先，画出 $y=\sin x\times\cos x$ 的图形。中间是 cos$x$ 的图形，最下面是 sin$x$ 的图形（图 5. 1）。



◆图5. 1　sin$x$与cos$x$的积的定积分

最上面的 $y=\sin x\times\cos x$ 的图形，是根据上次学习的“积和公式” $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ 计算得到的 $\frac{1}{2}\sin 2x$。

嗯嗯，这在之前计算过。

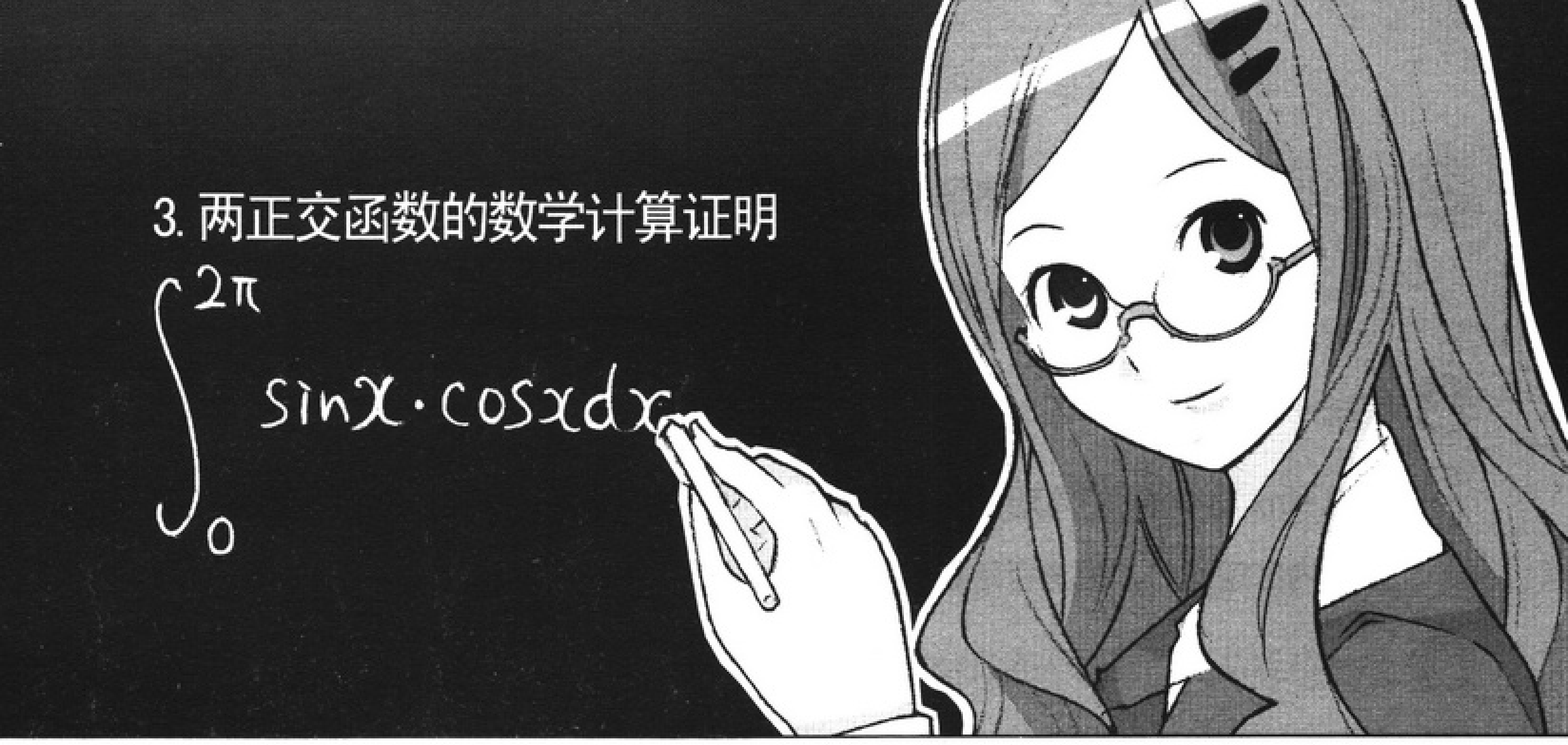
这里 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的周期相同，从图形中得到“1 周期＝0 到 2π”，那么就在这个范围内做定积分，把进行定积分计算对应的面积用斜线表示出来。

分别得到两个相同面积的波峰和波谷呢！

波峰的定积分是正数，而在波谷，函数的值是负数，面积与波峰相等，但定积分的值是负数。这么说，定积分的结果等于……

0！

对！这样就从图形上证明了 $\sin x$ 与 $\cos x$ 正交的概念。



以防出错，我们将 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的例子通过计算来证明一下吧！计算式如下：

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x \qquad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x \qquad \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}[1-1] = 0$$

不过，

$$\int \sin\underbrace{(2x)}_{\text{被积分的变量是}2x}\underbrace{\mathrm{d}x}_{\text{积分变量是}x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}(2x) \qquad \text{将二者都转换成}2x$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x$$

利用这个计算式，两个函数相乘后定积分的结果也是 0。也就是说，用数学计算证明了 $\sin x$ 与 $\cos x$ 成正交关系。这里证明了相同周期的函数、 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的例子，再来计算不同周期的函数的乘积的定积分，积分区间是周期长的那个函数的一个周期。以这个函数的周期为基准周期 1，其实也就是从 0 到 2π 的积分区间。之所以这样说，是因为区间 0 到 2π 对基准周期的那个函数来说，有一个周期，而对于其他函数，肯定至少有一个周期。

为什么肯定会至少有一个周期呢？

这是因为是以长的周期为基准来研究频率的。例如， $\sin x$ 函数 1 周期的波形长度中含有两个 2 周期的 $\sin 2x$ 的波形，这里周期比较长的函数是 1 基准周期的函数。

周期长的函数的周期确定为1后，其他函数的周期也就确定了？

对！无论 sin2x 还是 sin5x，基准周期都是 sin$x$（=sin1x），做定积分的时候，从 sin$x$ 一个周期的 0 到 2π 的积分区间里 sin5x 含有多个周期区间做定积分。在实际计算中，只需简单的将 0 到 2π 代入 sin2x 中，周期不是很清楚明了也能计算出正确的结果。

原来如此……

那么，我们以此为基础来看看其他三角函数之间是否也具有正交关系吧。这次先看看 sin$x$ 与 sin2x，这两个函数相乘的积函数的图形和表达式如下所示，积分区间是从 0 到 2π（图 5.2）。

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin 2x \, dx$$

根据 $\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\cos(3x) - \cos(-x)\right\}dx$$

将负号放入计算式中

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\cos(-x) - \cos(3x)\right\}dx$$

因为$\cos(-x)=\cos(x)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\cos(x) - \cos(3x)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 3x\,dx$$

对$\cos x$积分的结果是 $\sin x$

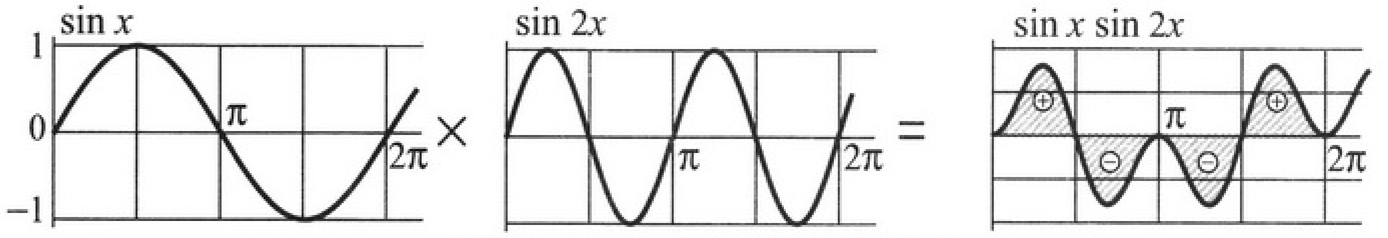
$$= \frac{1}{2}\left[\sin x\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{2\pi}$$

前面已经简单地讲过的概括积分变数的式子是这样的。

从图形上知道$\cos x$与$\cos 3x$从0到2π的积分都是0，这里计算也证明了$\cos x$与$\cos 3x$从0到2π的积分也是0。

由于$\sin(2\pi)=0 \quad \sin 0=0$

$$= \frac{1}{2}(0-0) - \frac{1}{2}(0-0)$$
$$= 0$$



◆图 5.2　sin$x$ 与 sin2x 的积的定积分

这也是因为面积相同而符号相反的形状反复出现，所以定积分的结果是0。

等于0……也就是说正交……

对！在此稍微发挥一下想象力，可以得出“不同周期的正弦函数相互成正交关系”。

嗯嗯！

用数学语言可以说成：“m，n 为不同的正数时，$\sin mx$ 与 $\sin nx$ 成正交关系”。

m 与 n 相等的话就不行吗？

对！例如 $m=n=1$ 时，是前面学习的 $\sin x\times\sin x$、就是 $\sin^2 x$ 的定积分，这个函数的定积分结果不是 0，因此 $\sin x$ 与 $\sin x$ 没有正交关系。这样的函数很容易明白“函数与函数本身不正交”。

确实。在圆周上点做完全一样的旋转运动，位置关系不成直角。

当然 m 与 n 相等，但不为 1 的时候，$\sin mx$ 与 $\sin nx$ 也不正交。之所以这样，是因为 0 以外的函数的 2 次方，无论取什么 x 值，函数值都不是负值，因此定积分的结果也肯定是正数。

原来如此……

cos 也是这样吗？

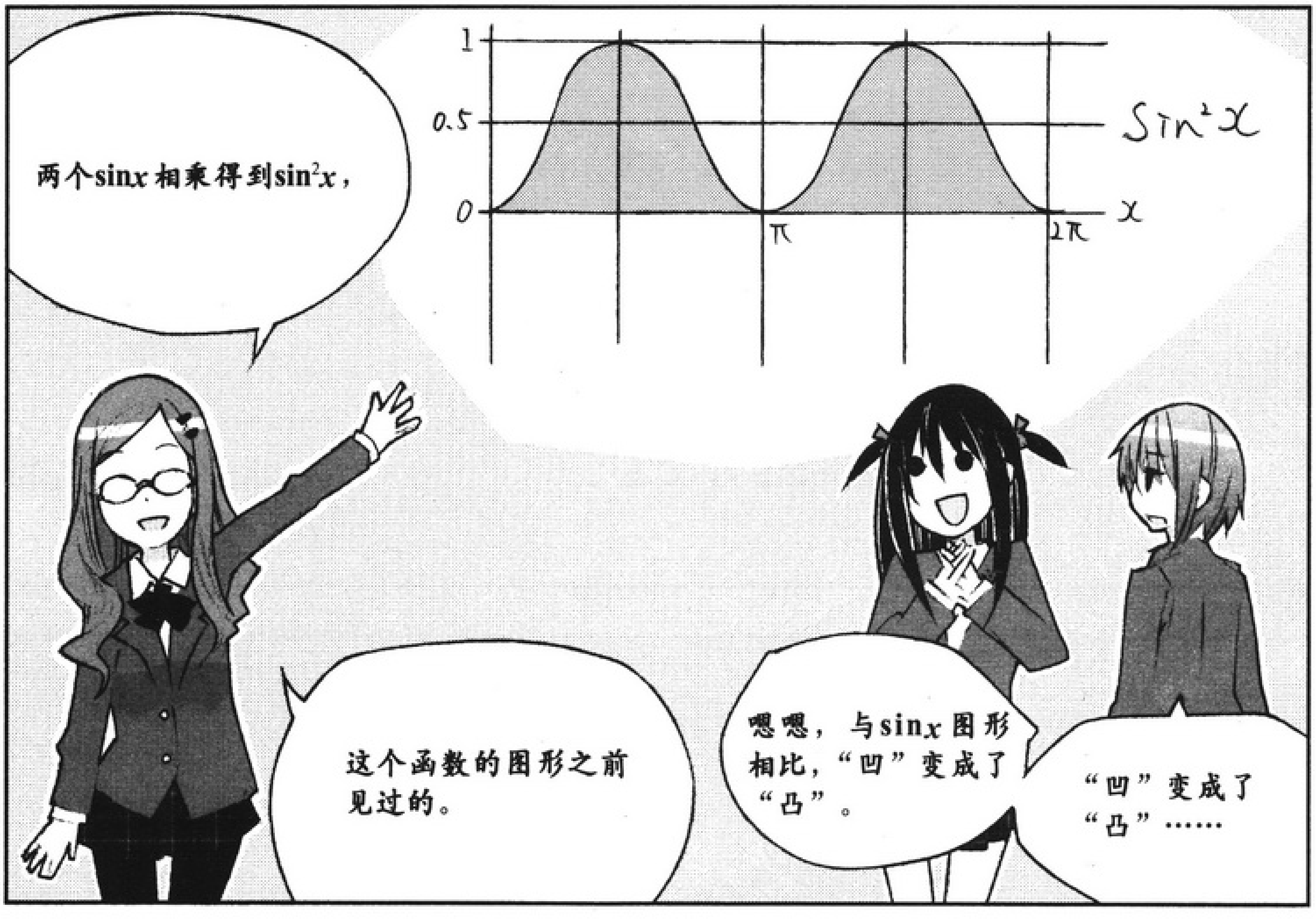
问得好。从结论上来说，cos，sin 都是一样的，m 与 n 相等时，$\cos mx\times\cos nx$ 从 0 到 2π 的定积分值不为 0，其余的都等于 0。

也就是说，$\cos mx\times\cos nx$当m与n不相等时相互成正交关系。

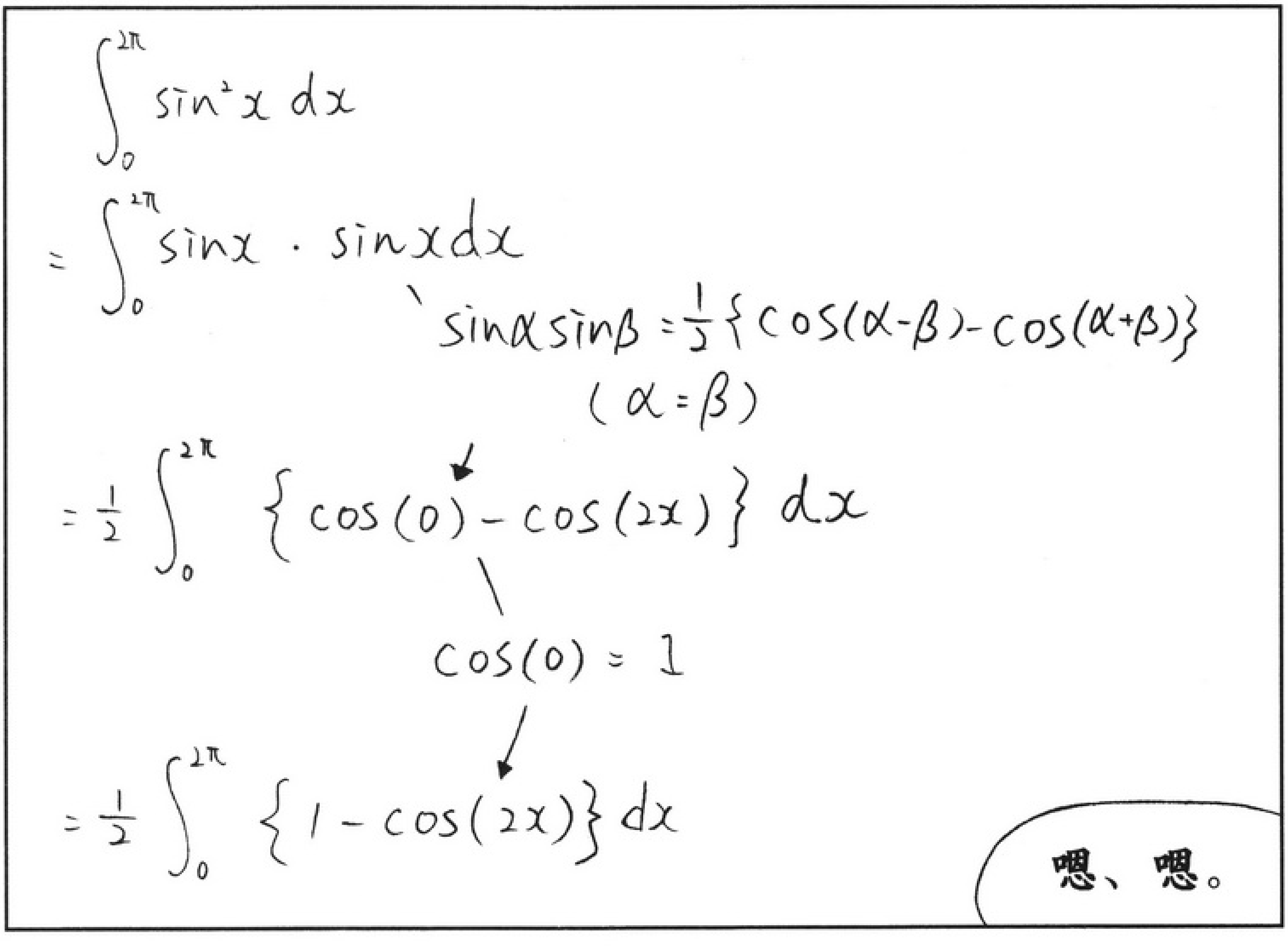
$\sin mx$、$\cos mx$ 都是与自身以外的函数成正交关系啊！

而且，之前见过的 $\sin mx\times\cos mx$，不论它们周期是多少，相互之间总是成正交关系！

4. $y=\sin^2 x$的定积分




比较遗憾的是，单从图形上看不出斜线部分的积分值（=面积），
没有办法，只能来计算了。
好！


$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx$
$=\int_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin x\,dx$
$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$
$(\alpha=\beta)$
$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(0)-\cos(2x)\}\,dx$
$\cos(0)=1$
$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{1-\cos(2x)\}\,dx$
嗯、嗯。


将这个式子展开……


$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} 1\,dx - \int_0^{2\pi} \cos 2x\,dx\right)$
变成这样了。
呃……计算好麻烦啊……
那么看，一下详细的表达式吧。
$\int_0^{2\pi}\cos 2x dx$是求周期为$\cos x$的一半的余弦函数的定积分，
不用计算就知道结果等于0。
啊，这样啊！


计算$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}x$
就容易了……
对！
$\frac{1}{2}$在x上的积分为$\frac{1}{2}x$，
将此从0到2π计算定积分值，将2π代入x中能得出结果……
$=\frac{1}{2}[x]_0^{2\pi}$
$=\frac{1}{2}(2\pi-0)$
$=\pi$
答案是π吧！
对！
而且换成$\cos x \times \cos x$,
也能得到与此相同的结果。


不需要怎么思考，
真的吗？
$\sin x$只需向左平移$\frac{\pi}{2}$就能得到$\cos x$，
那么定积分的结果也应该是π。
原来如此！
但是，这样计算有什么意义吗？
当然有了！
实际上，这里得到的π在傅里叶变换中有很大的作用！
不过这是以后要讲的知识，
今天就到这儿吧！
好！

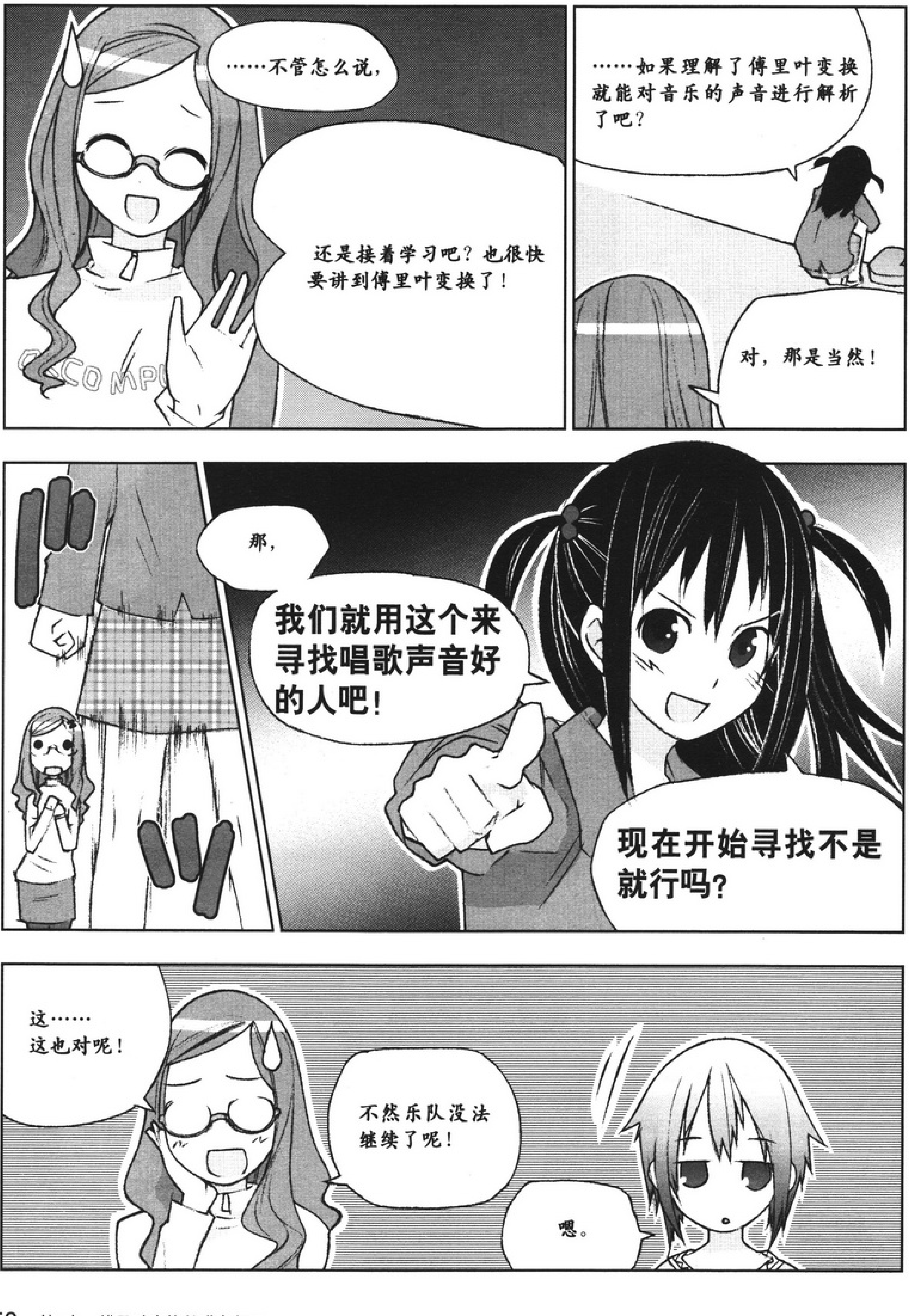

接下来，
得赶快回去，
写文化节用的曲子！
大家都为精彩的实况努力吧！
我们也得加紧
找适合当主唱的人呢！
加油！

第 6 章

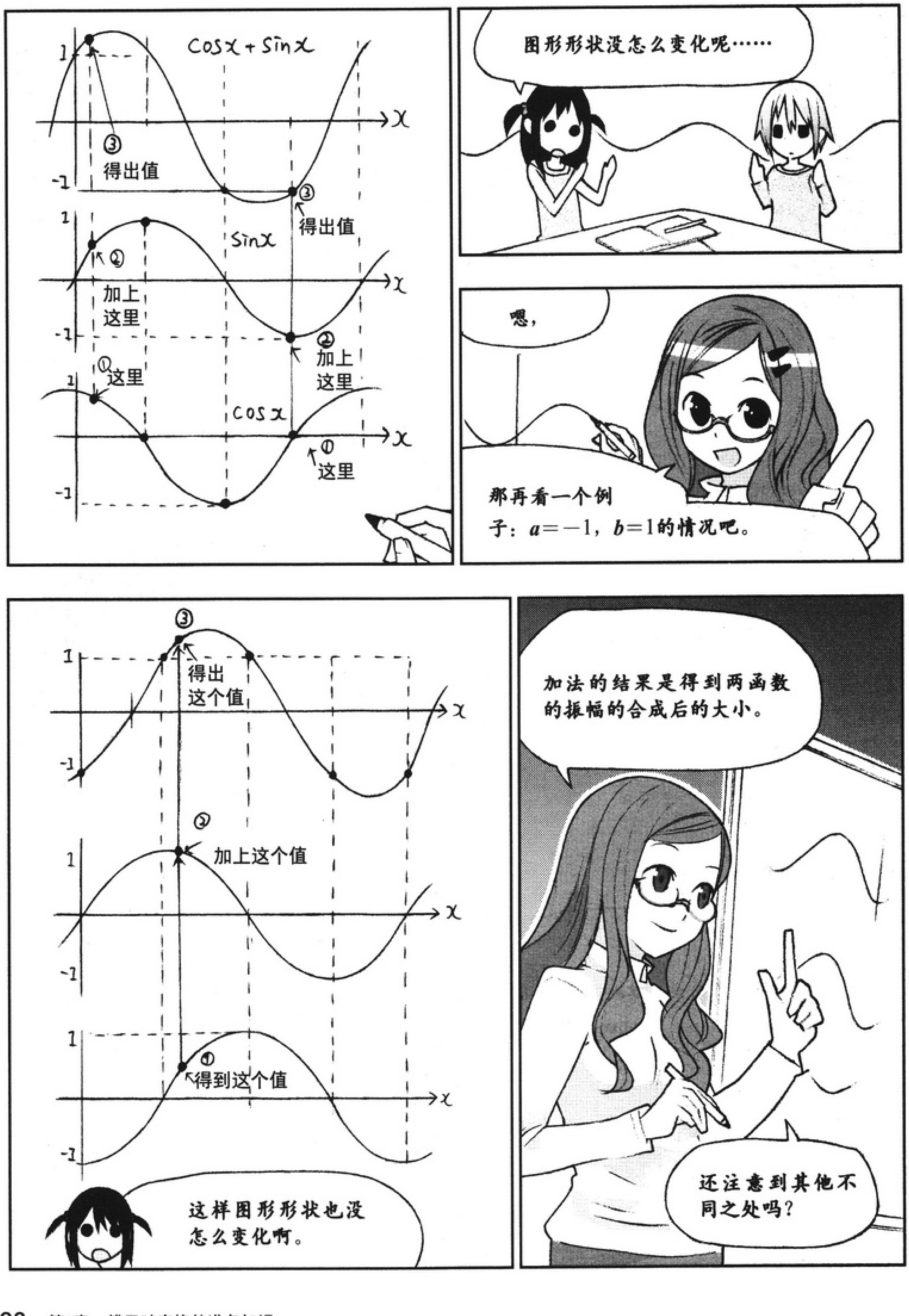
傅里叶变换的准备知识

1. 用三角函数的加法运算制作波形

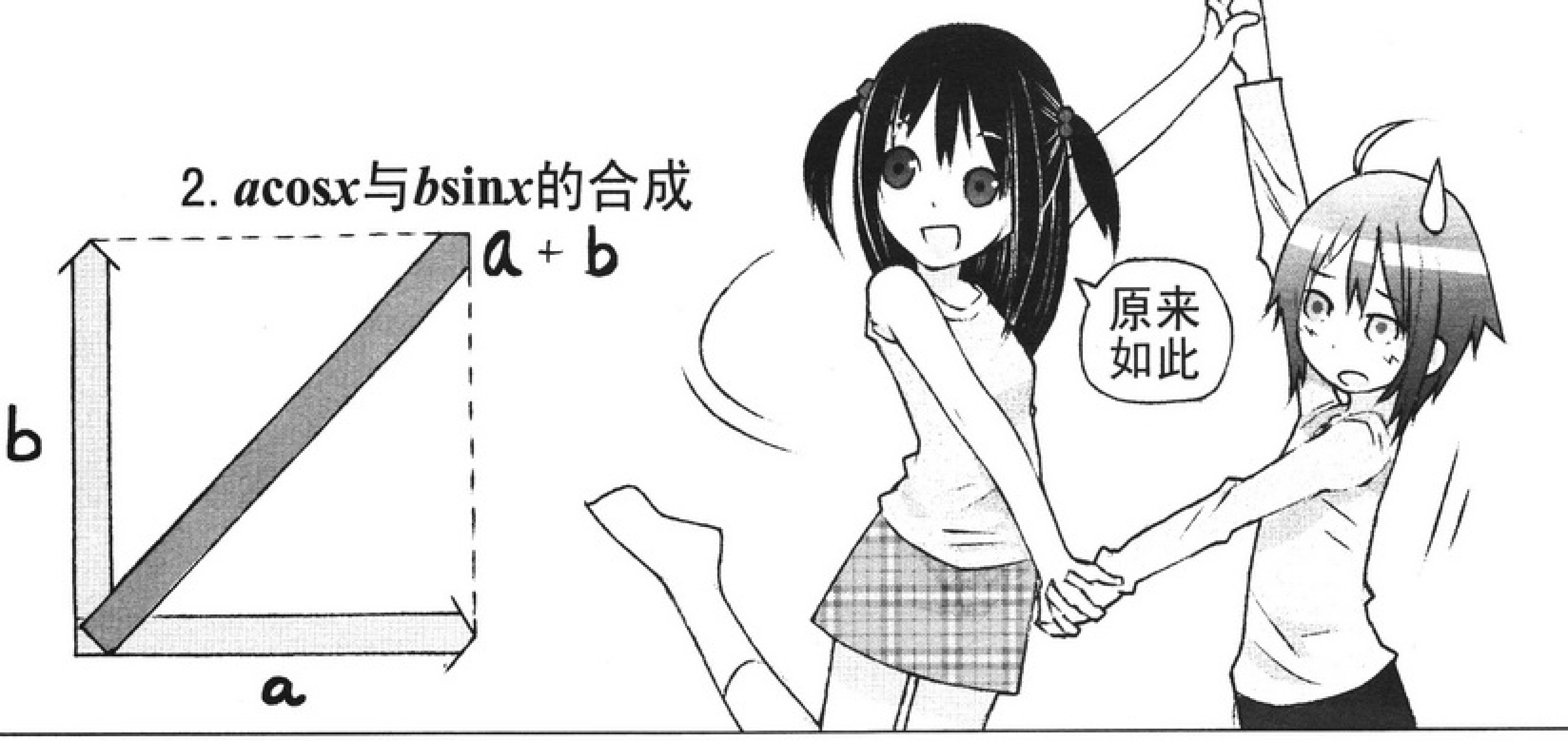

没有主唱还是不行啊……
啊……
能在台上大声唱歌就行了……
怎么就连这样的人也找不到啊……
怎么办啊……离文化节都不到一个月了……
……


……不管怎么说，
还是接着学习吧？也很快
要讲到傅里叶变换了！
……如果理解了傅里叶变换
就能对音乐的声音进行解析
了吧？
对，那是当然！
那，
我们就用这个来
寻找唱歌声音好
的人吧！
现在开始寻找不是
就行吗？
这……
这也对呢！
不然乐队没法
继续了呢！
嗯。


那么，
利用各种正交函数的加法运算……
来试着作出各种不同的波形吧！
首先我们从相同周期的sinmx与cosmx的加法开始吧。
为了简便，取m=1，来看y=acosx+bsinx的图形吧。
cos的系数是a呢，
a与b不一样该怎么办呢？
那么a、b都取1吧，
然后，函数的和是将这两个函数的y值加起来而求得的，就变成这样了。


cos x + sin x
③
得出值
③
得出值
sin x
②
加上
这里
②
加上
这里
①
这里
cos x
①
这里
图形形状没怎么变化呢……
嗯，
那再看一个例
子：$a=-1$，$b=1$的情况吧。
③
得出
这个值
②
加上这个值
①
得到这个值
这样图形形状也没
怎么变化啊。
加法的结果是得到两函数
的振幅的合成后的大小。
还注意到其他不
同之处吗？


横向位置
改变了……
对！
图形的出发点，
也就是函数$y=0$
对应的x值从x轴
的负值侧移到正值
这边来了，因此出
发点不同了。
2
1
相位
0
-2
这个出发点到y轴的
距离叫做“相位差”，
简称为“相位”。
呃……
将$a\cos x$与$b\sin x$相加，
相位会发生变化啊……
自然界中存在的各种波形肯定不一
定都是从0开始的，为了改变相位，
因此需要将$\sin x$与$\cos x$组合起来
进行运算。
那我们就先从这里
开始学习吧！

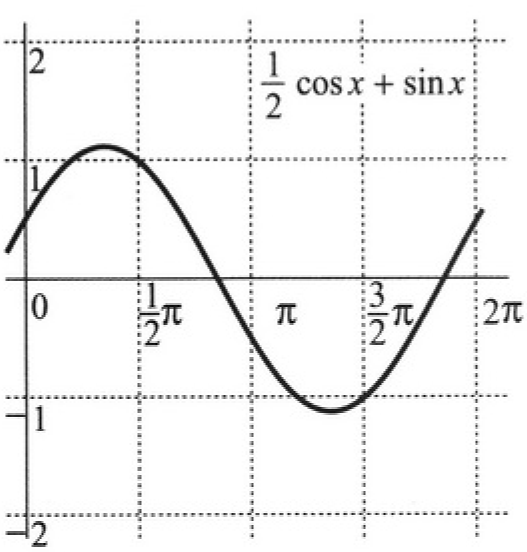


不采用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 就没法表示相位了吗？

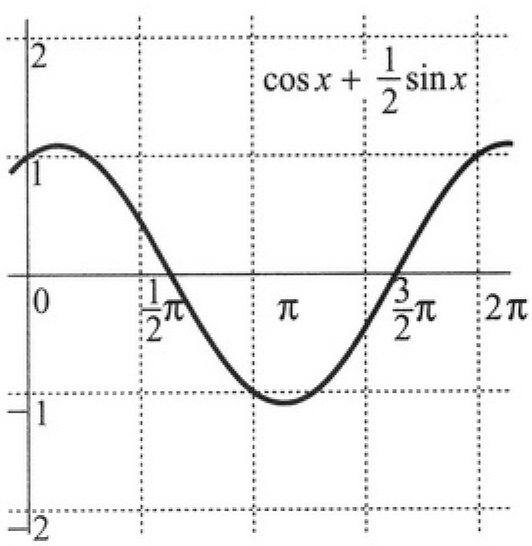
例如 $\sin x$ 用 $\sin(x+\theta)$ 的式子表示，改变 θ 也能达到改变相位的效果。但是，在此对 θ 取无限多的值是没有必要的，而且会使波形的合成和分析变得很复杂。

原来如此……

在这里，不是采用个别函数的固定不变的形状，而是应该采用 “正交函数的组合”进行运算。实际上，$\sin x$ 与 $\cos x$ 这两个函数，组合能得到很多不同位相的 $\sin(x+\theta)$。我们在此看几个具体的实例吧，例如 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ 的时候是这样的（图 6.1）。而 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ 的时候是这样的（图 6.2）。



◆图6.1 $\frac{1}{2}\cos x+\sin x$ 的波形的相位

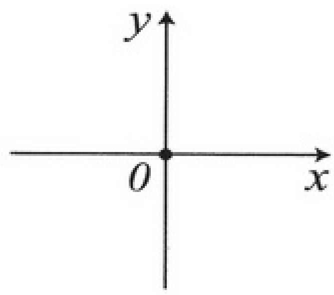


◆图6.2 $\cos x+\frac{1}{2}\sin x$的波形的相位

只用到 sin 与 cos 两个函数，是利用了这个函数正交的性质，利用了“函数正交，那它们相互之间无法通过组合得出对方的表达式”的性质。

这是怎么回事啊?

用简单的例子来说明一下，在画各种各样的函数的图形的时候，我们都是采用相互成直角的 x 轴和 y 轴为基准的（图 6.3）。



◆图6.3 相交成直角的 x轴与y轴的图形

这在绘里奈的讲课过程中出现了很多次!

对这个图换一种看法，$y=0$ 这个常数函数对应 x 轴，$x=0$ 这个常数函数对应 y 轴。也就是说，x 轴和 y 轴这两个基本图形，对应着两正交函数 $y=0$ 和 $x=0$。

哦，原来是这样啊！不过，说它们正交觉得是理所当然的事情。

但请注意，这个理所当然可是需要很复杂的解释的。无论 y 轴（$x=0$）乘以什么数都无法得到 x 轴（$y=0$）。0 乘以任何数都还是等于 0，因此 x 轴上某一值（例如 $x=5$），就无法用 $x=0$（y 轴）乘以某个数而得到。对于 y 轴也是同样的情况。这就是“函数正交，那它们相互之间无法通过组合得出对方的表达式”的意思。平时，毫不经意地将轴画成直角相交的形状，平面用两个变量来表示， x 与 y 中的任何一个都无法用另一个函数来表示，都默认觉得肯定是这样的。

x 轴与 y 轴正交，因此潜意识下就画成了直角相交的形状了…… 所以，以这二者为基准，就能描绘出各种不同的点的坐标了。

这个先放在一边，回到 sin 与 cos 的话题上来……例如，$\cos x$ 函数，无法通过改变 $b\sin x$ 的 b 而得到。

$\cos x$ 也是同样的情况！?

对啊！ $\sin x$ 也无法通过改变 $a\cos x$ 的 a 而得到。而且，提前讲一下，$\sin 3x$ 也无法通过 $\sin x$ 组合得到。这是因为 $\sin 3x$ 与 $\sin x$ 正交的原因。x 轴与 y 轴它们是两个相互正交的函数，不止这些， 还有 $\sin x$、$\sin 2x$、$\sin 3x$ 等等，它们相互之间都成正交

关系。 cos 函数中不同周期的函数如 $\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$ 等等都成正交关系。还有 $\cos nx$ 与 $\sin nx$，包括周期相同时，它们也相互正交。相互正交的函数组合能够得出各种不同的函数。无法用其他三角函数组合合成，且相互正交的各类三角函数是制作许多波形的基本单位。

接下来，回到原来的话题上，改变 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的幅度（a 和 b），合成得到的波形的振幅也随之变化。 $\sin x$ 与 $\cos x$ 组合，转换成在圆周上旋转的矢量的合成会容易理解一些。

矢量就是图形中画的“→”表示的……？

对！矢量，简单地说，是表示力的方向和大小的物理量。现在有 a 和 b 两个矢量，以 a 和 b 为基础作一个平行四边形（这个例题中，用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 取代为基础，因为它们成正交关系，作出的是长方形），求这个平行四边形的对角线，就能求出这两个矢量合成得到的矢量（图 6.4）。

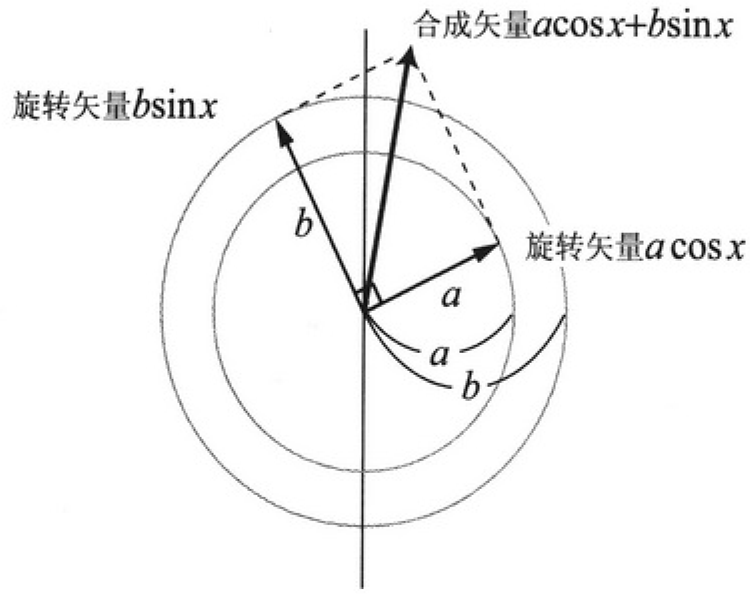
◆图 6.4　矢量 a 与 b 的合成

这在物理书上看到过！

矢量在物理学中经常使用。

接下来，$\sin x$ 与 $\cos x$，画在分别以 a 和 b 为半径的圆周上，两矢量在各自的圆周上旋转，二者总是相差 $\frac{\pi}{2}$（90 度），思考一下二者的合成，由于 $\sin x$ 与 $\cos x$ 成正交关系，因此，此处的平行四边形是长方形（图 6.5）。

注）这里 $\vec{a}$ 用 $\boldsymbol{a}$，$\vec{b}$ 用 $\boldsymbol{b}$ 表示。



◆图 6.5　两正交旋转矢量 $a\cos x$ 与 $b\sin x$ 的合成的概念

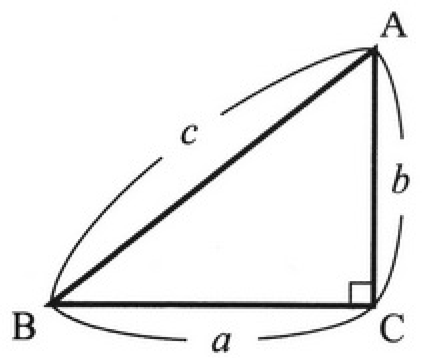
呵！真的呢！

采用这样的矢量表示方法，能知道合成得到的 $a\cos x + b\sin x$ 的幅度（矢量的长度）。

……能知道幅度值？

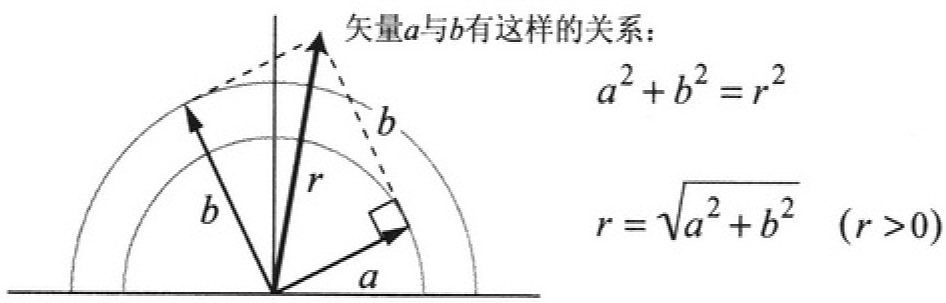
能知道哦！请回忆一下毕达哥拉斯定理。

毕达哥拉斯定理，好像是……$a^2+b^2=c^2$。



$$a^2+b^2=c^2$$

这里也适用毕达哥拉斯定理吧（图6.6）。

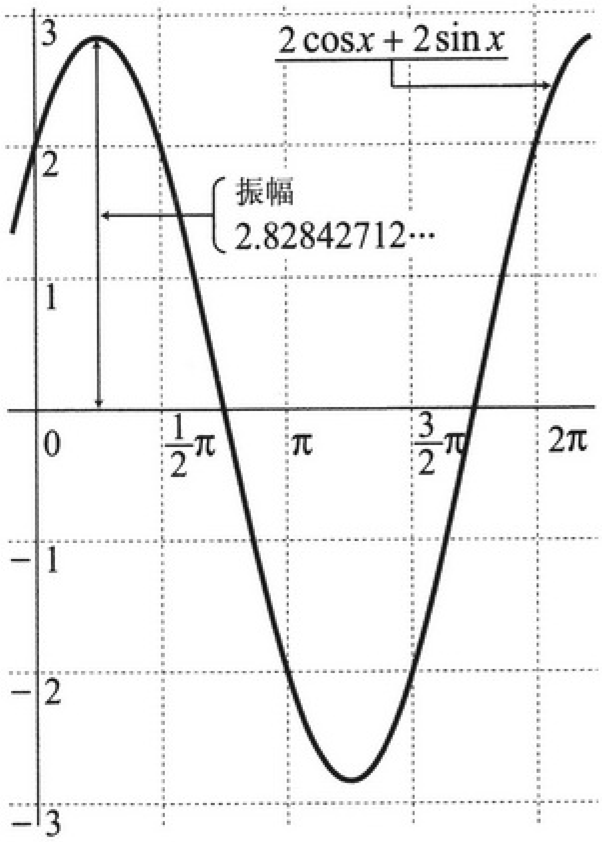


◆图6.6　矢量合成中毕达哥拉斯定理的应用

合成得到的矢量（$a+b$）对应的是半径为 r 的圆，这样就能明白 $a^2+b^2=r^2$ 这个关系了。将这个式子变换一下得到 $r=\sqrt{a^2+b^2}$。

那 $a\cos x+b\sin x$ 的幅度大小就是 $\sqrt{a^2+b^2}$！

就是这样！例如，来看一下 $a=2$ 与 $b=2$ 时的波形，有 $r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2.82842712\cdots\cdots$ 也就是说 $2\cos x+2\sin x$ 的波形的幅度（振幅）是 $2.82842712\cdots\cdots$（图6.7）。

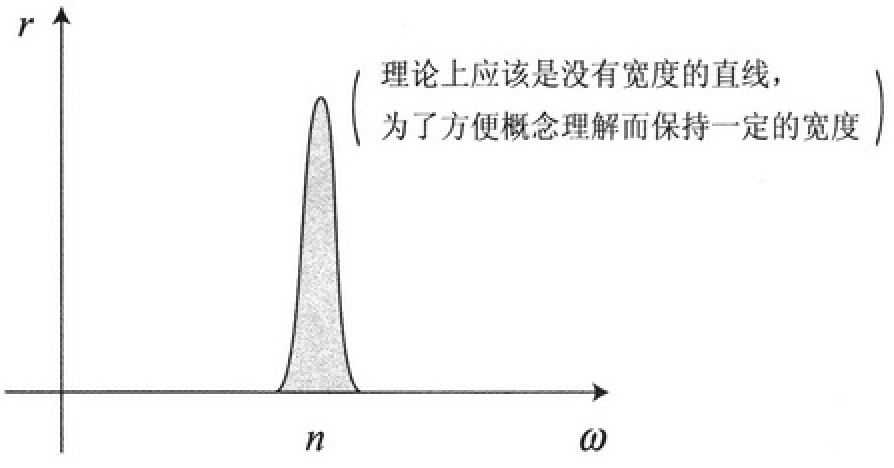


◆图 6.7　2cos$x$ ＋ 2sin$x$ 的振幅

像这样，将 a 与 b 进行恰当的组合，虽然不能改变周期，但能自由合成出各种振幅和相位！

呃，可以得到周期相同但振幅各不相同的波形呢！

也就是这样一回事，$\sin nx$ 与 $\cos nx$ 合成时，相位发生变化而周期不变。$\sin x$ 与 $\cos x$ 合成时是 1 周期，$\sin 2x$ 与 $\cos 2x$ 合成时是 2 周期，$\sin nx$ 与 $\cos nx$ 合成时是 n 周期。这个 n 周期对应着之前讲过的 ω（角频率）。而且，将这个 n 周期与 r 组合起来能得到频谱图（图 6.8）！



◆图 6.8　$\sin nx + \cos nx$ 的频谱图

把 ω 看作是频率就能得出频谱图呢！

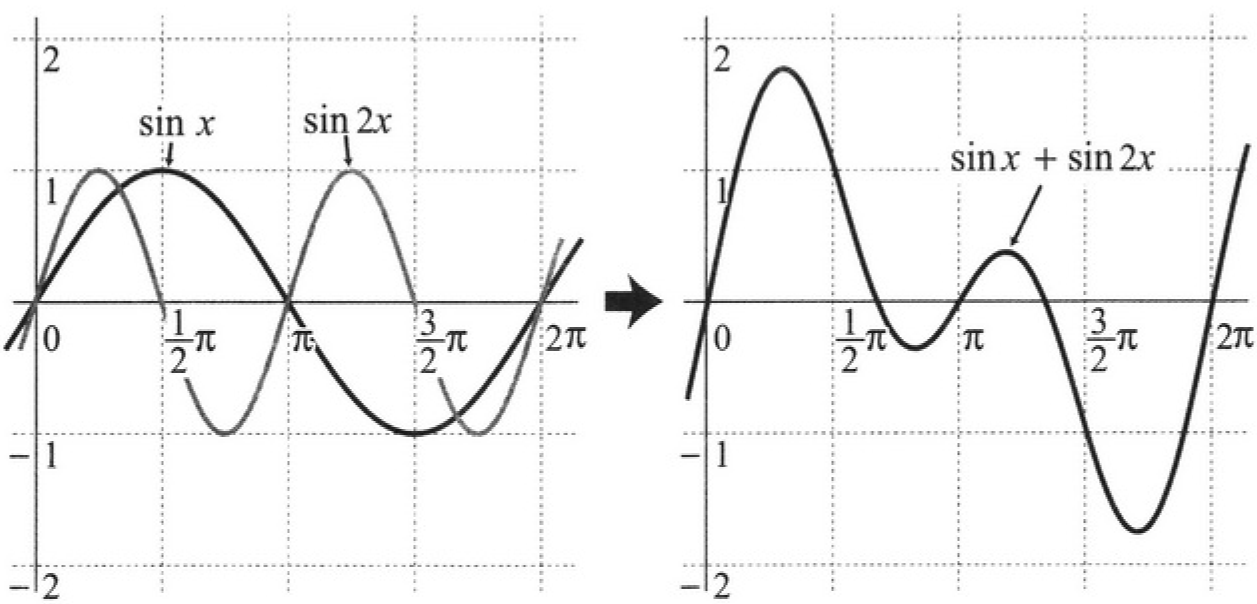
对！

3. 周期不同的三角函数的合成

这次来看看周期不同的三角函数的合成吧。通过三角函数的合成表示某个函数的表达式，与后面要讲的傅里叶级数有关系，但是在这里暂时不管，先用计算机中根据函数画图形的软件，来简单的确认一下图形。

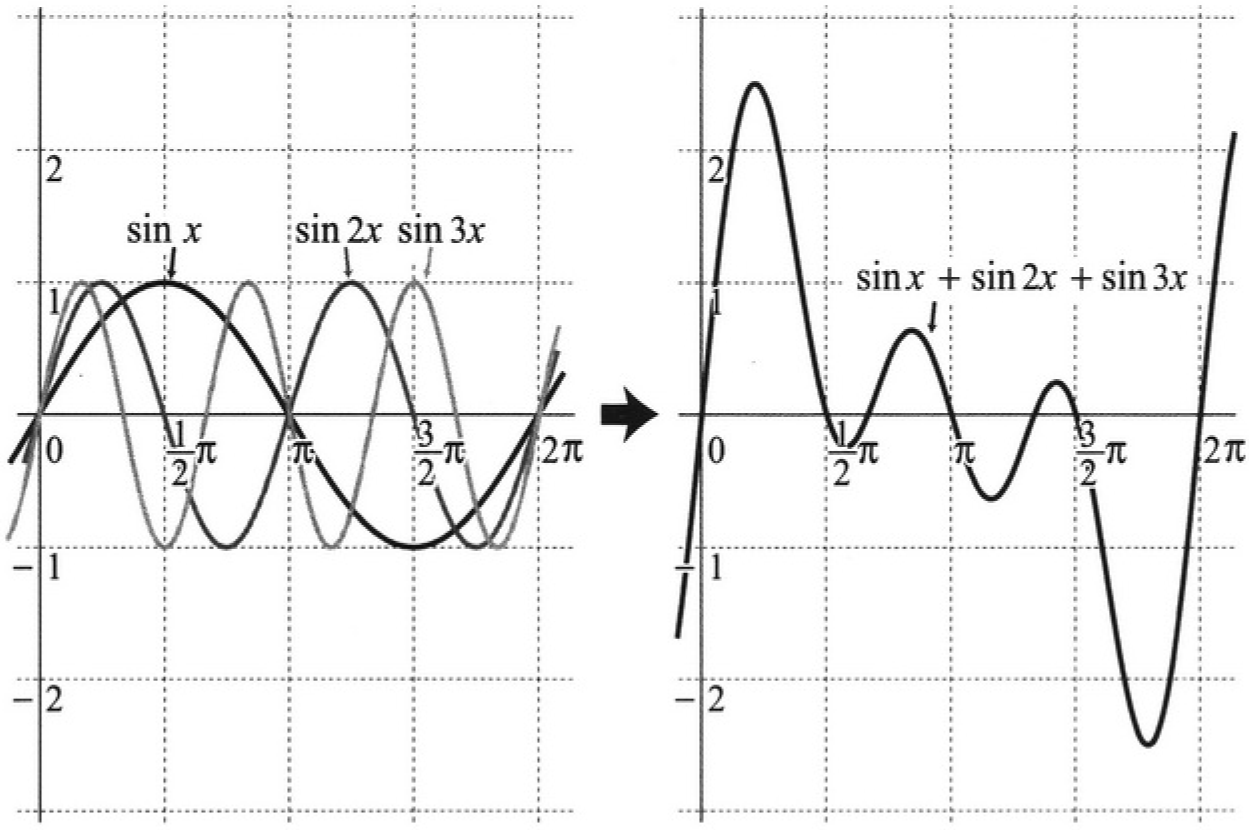
好！

现在看 $\sin x + \sin 2x$（图 6.9）。



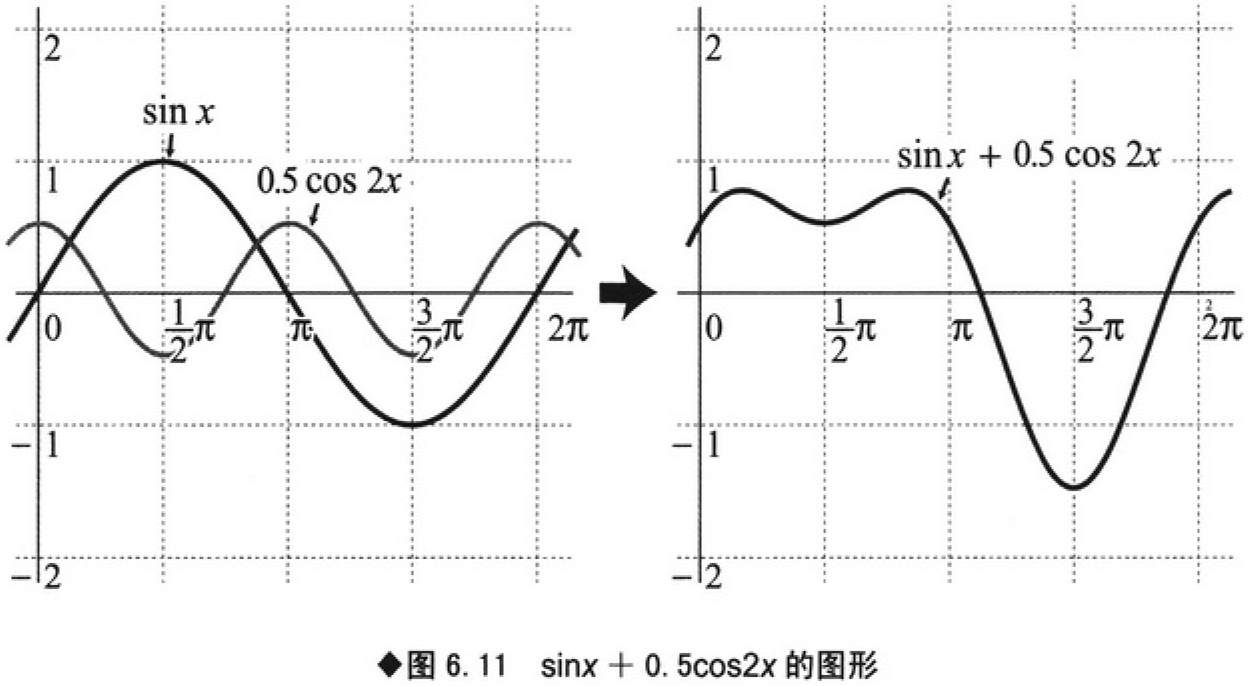
◆图 6.9　$\sin x + \sin 2x$ 的图形

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ 会是怎么样的呢（图 6.10）？



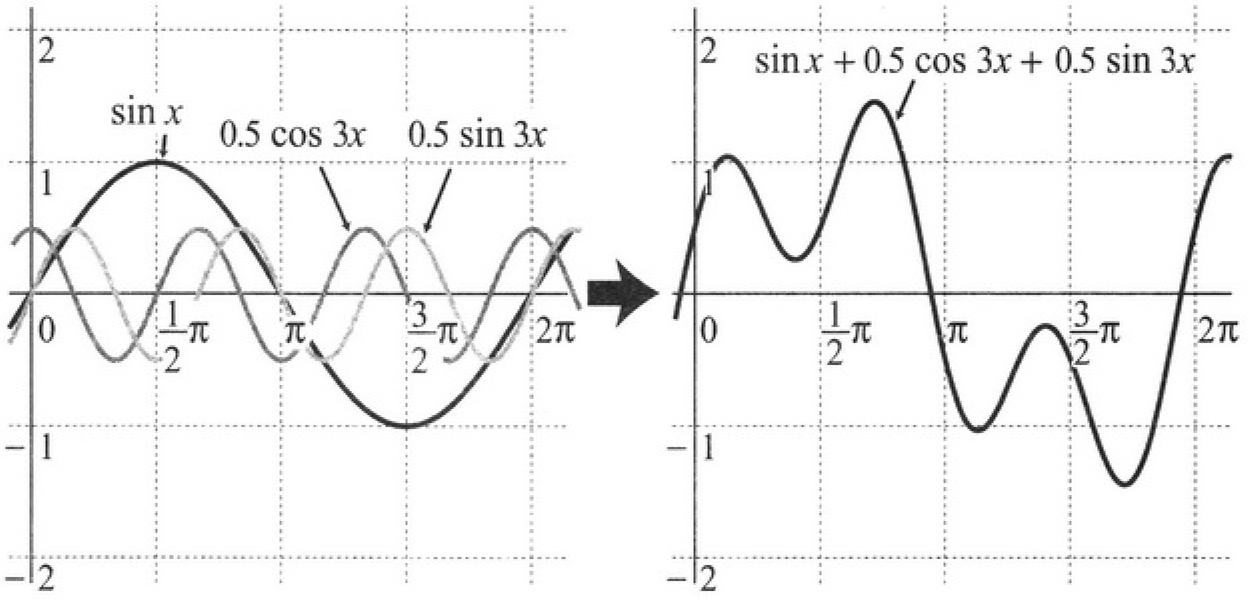
◆图 6.10　sin$x$ ＋ sin2x ＋ sin3x 的图形

而 sin x ＋ 0.5cos2x 又会是怎么样的呢（图 6.11）？



◆图 6.11　sin$x$ ＋ 0.5cos2x 的图形

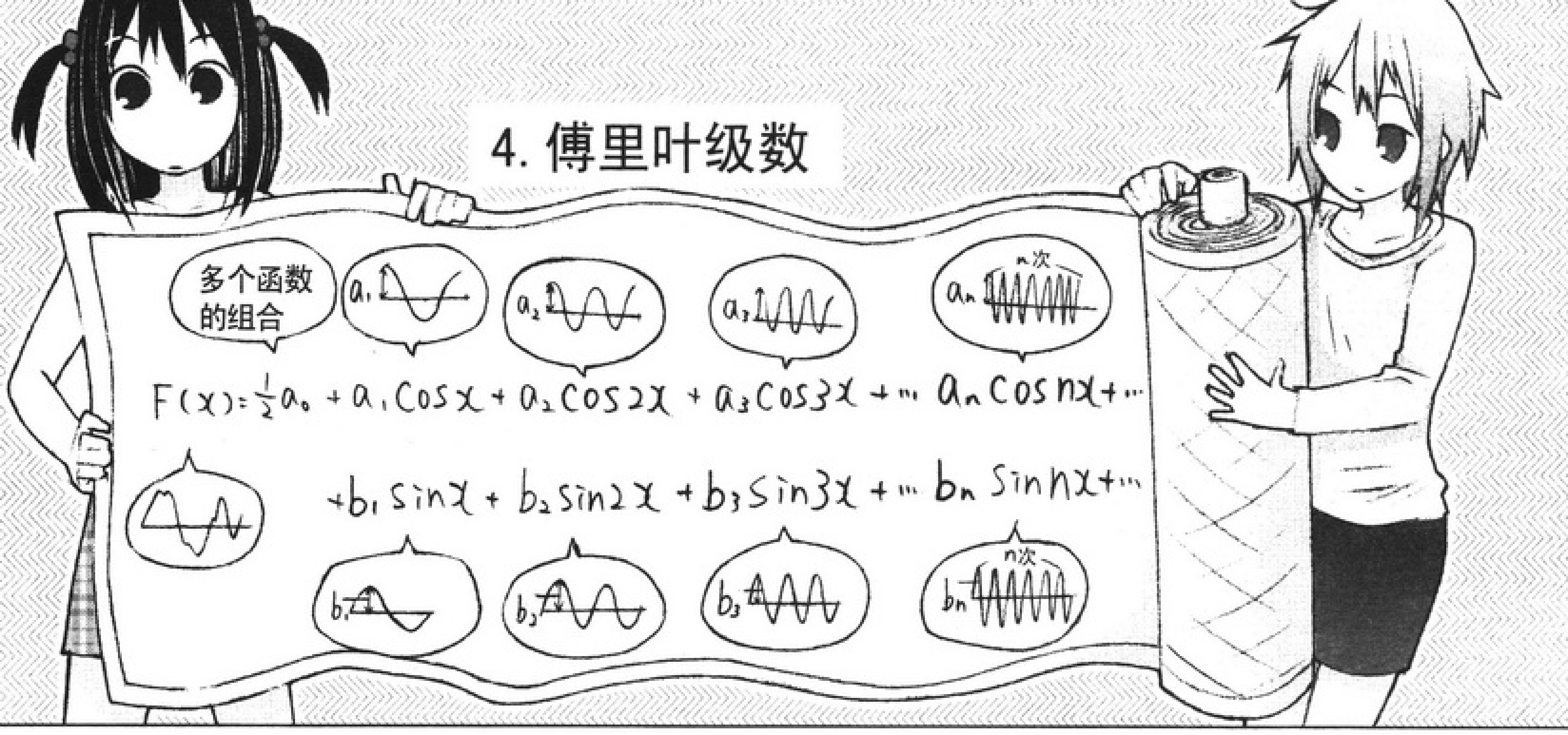
最后来看看 $\sin x + 0.5\text{co}3x + 0.5\sin 3x$ 的图形吧（图 6.12）。



◆图 6.12　$\sin x + 0.5\cos 3x + 0.5\sin 3x$ 的图形

对 sin 和 cos 进行组合，能够得到许多不同形状的波形呢！

4. 傅里叶级数



前面讲的例子，最多也只有 3 个 sin 或 cos 函数的组合合成，如果用更多个的 sin 或 cos 函数进行合成，就能得到更加复杂的函数。

呃，不过，很多个函数进行合成，如果没有计算机的话没法计算出来吧。

使用计算机确实能有效提高计算效率。首先，理解这个理论很重要。这个理论是“傅里叶级数展开（傅里叶级数）”！傅里叶级数展开用公式表示，如下：

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + a_n\cos nx + \cdots \\
&\qquad + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots + b_n\sin nx + \cdots \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)
\end{aligned}
$$

哦，有公式啊？感觉好难的公式呢……看见这些数学符号头就疼！

啊，那看看表达式表达的意思吧。

首先，解释一下式子的整体意思。这个式子中，左边的 $F(x)$ 函数表示右边由 cos 与 sin 函数合成得到的函数。当然，$F(x)$ 表示怎样的函数，根据 a_0，a_1，…，a_n，…，b_1，…，b_n，…的变化而改变。那么在此，通过 $F(x)$ 与 a_0，a_1，…，a_n，…，

b_1，…，b_n，…的关系来研究合成的意义吧。表达式的第一项是$\frac{1}{2}a_0$，这个常数项能使后面的由三角函数合成的波形全体进行上下移动。

这就相当于$y=ax+b$中的b吧。式子后面出现的$\sum$是什么意思？

数学符号$\sum$将上面式子中的所有的加法运算，用一个加法总和表示出来。用简单的例子来示范$\sum$的计算方法，是下面这样（图6.13）。

$\sum$的基本计算规则

n从1开始

$$\sum_{n=1}^{5} n = \underbrace{1+2+3+4+5}$$

直到n的结束值

这个n增加起来，n从1开始每增加1一直加到5

按顺序每次增加1

例如……

$$\sum_{n=1}^{3} x_n = x_1 + x_2 + x_3$$

例如……

n的结束值为∞(无限大)，也就是无限量加上去

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + a_{100}\cos 100x + a_{101}\cos 101x + \cdots$$

两个n同时增加

◆图6.13　符号$\sum$的说明

傅里叶级数展开的$\sum$中也有n，请注意，这个n既是“决定振幅大小的数值”，也是“函数中x前面的决定周期的数值”，这两个数值中应该同时代入1，2，3，4…不断累加起来。

呃，真是不可思议啊！

这个傅里叶级数展开要求函数 $F(x)$ 有某个周期特性，也就是以利用周期函数的合成为前提。对于非周期函数，取某个区间，以这个区间内的波形为周期波形而重复出现，形成周期函数，然后就能对波形进行展开了。

这样啊……

明白了的话，那再进一步详细的讲解一下吧！ a_1， a_2， a_3， …， a_n， …b_1， b_2， b_3， …， b_n…叫做傅里叶系数，这些系数的值能决定 $F(x)$ 波形的形状。之所以这么说，是因为傅里叶级数中，决定振幅的 a_n 与 b_n 的 n 与决定周期的 nx 的 n 联系在一起，而且 a_n 与 b_n 分别表示 cos 与 sin 函数的系数，如果决定了 a_n 与 b_n 的大小，合成函数的形状也就是 $F(x)$ 的波形也自然而然地为某一定值了。

就像时钟，通过读取长针和短针的数，就能知道时间了。

相、相差很远的比喻呢，不过可以想成是从两个事项得到另外特定的事项。

秒针……？

就不要纠缠于细节问题了！

明白了概念，那就来看一下具体的波形合成的例子吧！

是 mix 呢！

mix……？

波的混合叫做 mix！

那么，来看看 $a_n \sin nx$ 的 n 从 1 开始， 2， 3， 4……按顺序到 40 的混合。

连绘里奈也……

周期函数的系数，也就是 a_n 等于 n 的倒数。$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$。依此可以得到很有趣

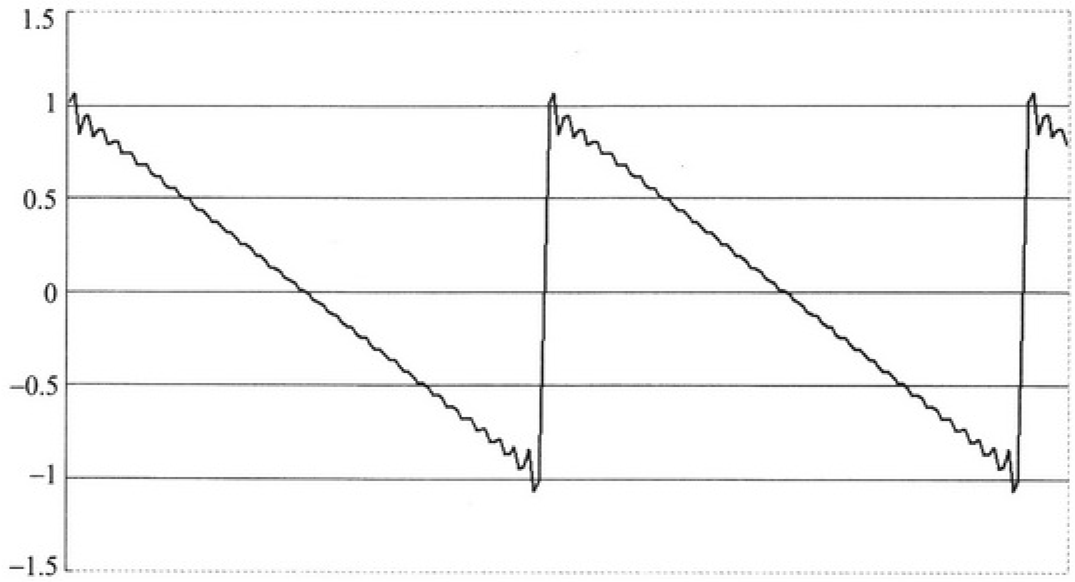
的波形。

计算很麻烦吧！

在此用计算机来计算看看。不需要采用任何专门的计算软件，表格计算软件 Excel 就可以计算出来。

呃！原来 Excel 不是只能用来制作表格啊！

我们来看看结果（图 6.14）……



◆图 6.14　sin 函数从 1 到 40 的依次累加的合成函数

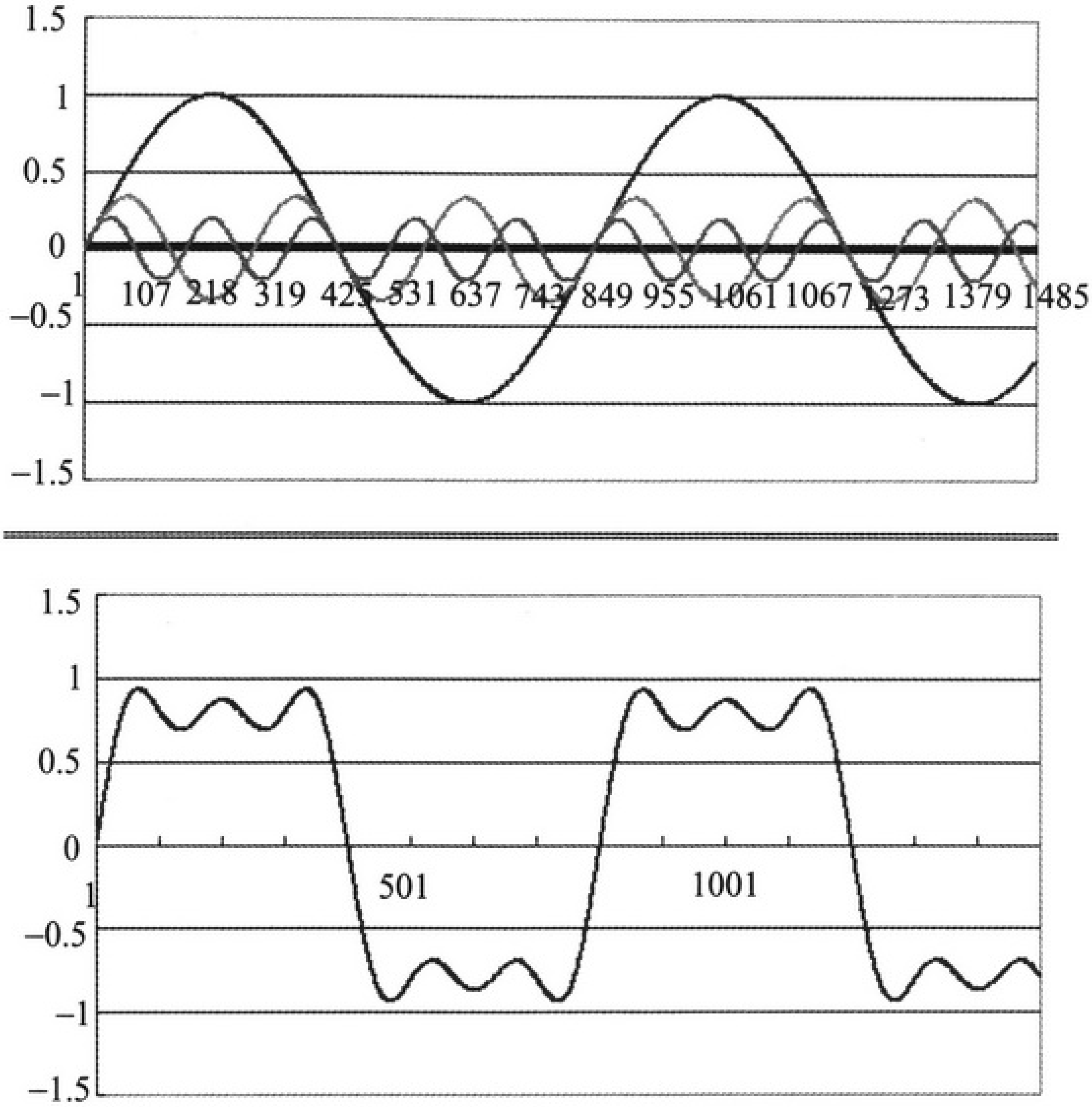
哦！怎么变得好尖啊！

很像锯齿呢……

对！这样的波形实际上叫做“锯齿波（又叫锯齿状波）”！

呃！与之前看到的波形的形状都不相同呢！

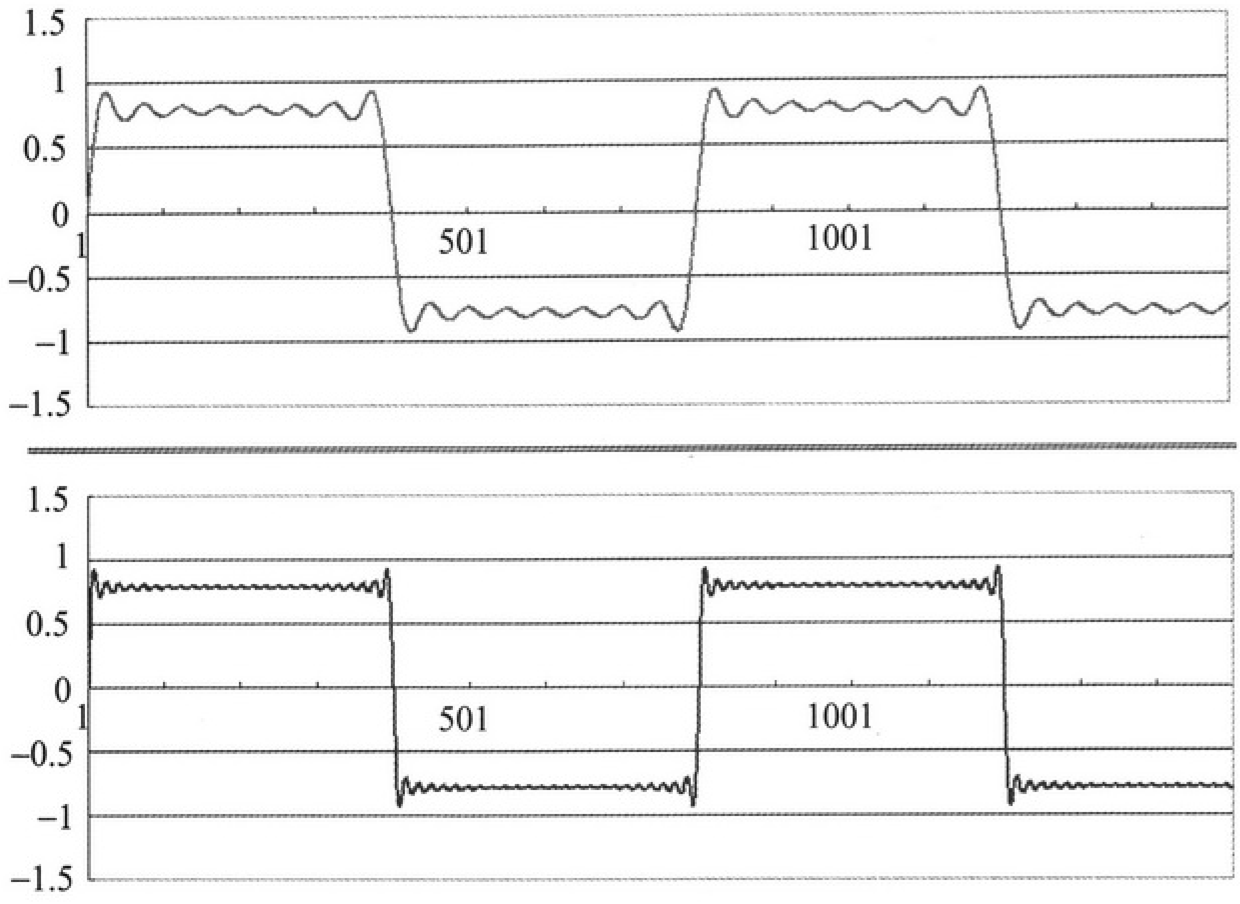
那再来看一个也很有趣的波形吧。这次，只取出 $a_n \sin nx$ 的 n 为奇数时的函数进行合成。在此，a_n 等于 n（奇数）的倒数，n 取到 5 为止，合成得到的波形变成这样了（图 6.15）。



◆图 6.15　奇数次的 sin 函数从 1 到 5 的依次累加的合成函数

得到了与锯齿波完全不一样的波形呢！

当 n 累加到无穷大∞时合成得到的波形叫做“方波（又叫矩形波）”。接下来再看看在同样的条件上，n 值累加到 15 时的波形和 n 累加到 49 时的波形见（图 6.16）。



◆图 6.16　$n=15$ 时累加合成的波形（上）与 $n=49$ 时累加合成的波形（下）

波形变得越来越细了，形状越来越接近于直线了！

不同周期的sin函数的合成，能得到这样的波形。

锯齿波、方波以前好像都听说过……

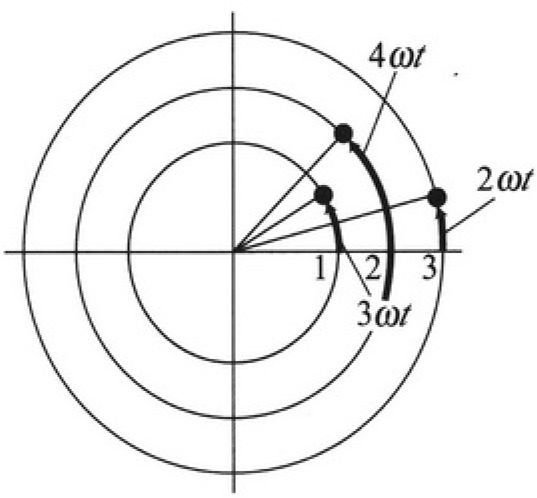
没有觉得这与乐队有关系么？例如，贝司的效应器中有“贝司合成器”。这个合成贝司，为了得到电子的贝司声音，需要有针对性的改变波形。所有“电子音”的声音中大部分都整理过波形，这个效应器能将贝司的波形转换为锯齿波或方波之类的波形。

原来如此……

与之前见过的锯齿波的形状一样，锯齿波制作的是边缘很尖的声音，方波与锯齿波相比，得到的是边缘角很柔和的声音。

5. 时间函数与频率谱

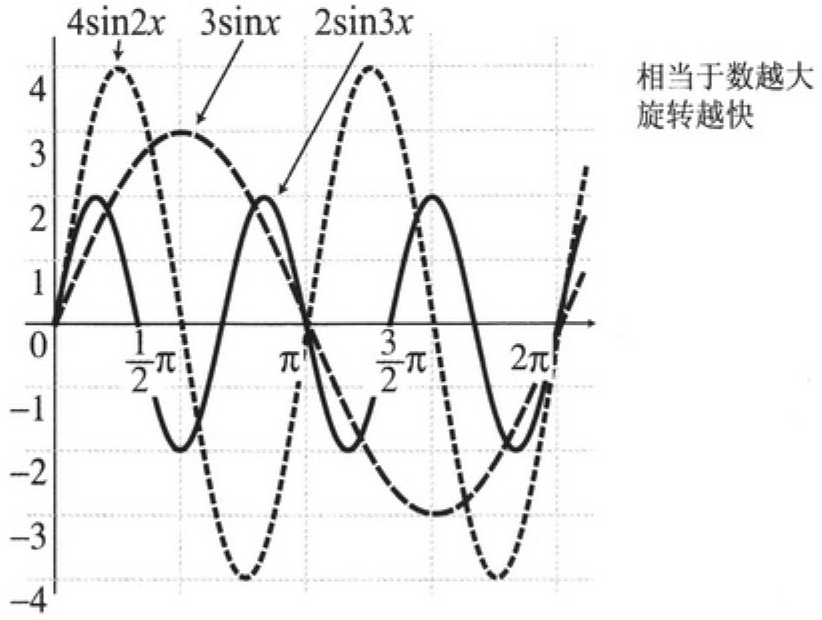
以前，讲过这样的图的知识（图6.17）。



◆图6.17　分别在三个圆周上旋转的点

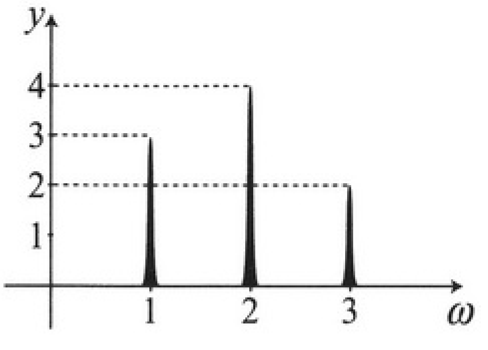
的确是，在讲三角函数的时候……三个不同的点在半径为1、2、3的圆上旋转。

对！将这个用随时间变化的图形表示出来，就能得到 sin 函数（图 6.18）。



◆图6.18　将图6.17用时间函数表示的图象

这种随时间变化的函数叫做时间函数，有确定周期的重复变化的函数叫做周期函数。接下来，以 ω 为横轴，将上图转换为频率谱的图象。这样就讲完了从时间函数到频率谱转换的流程（图 6.19）。



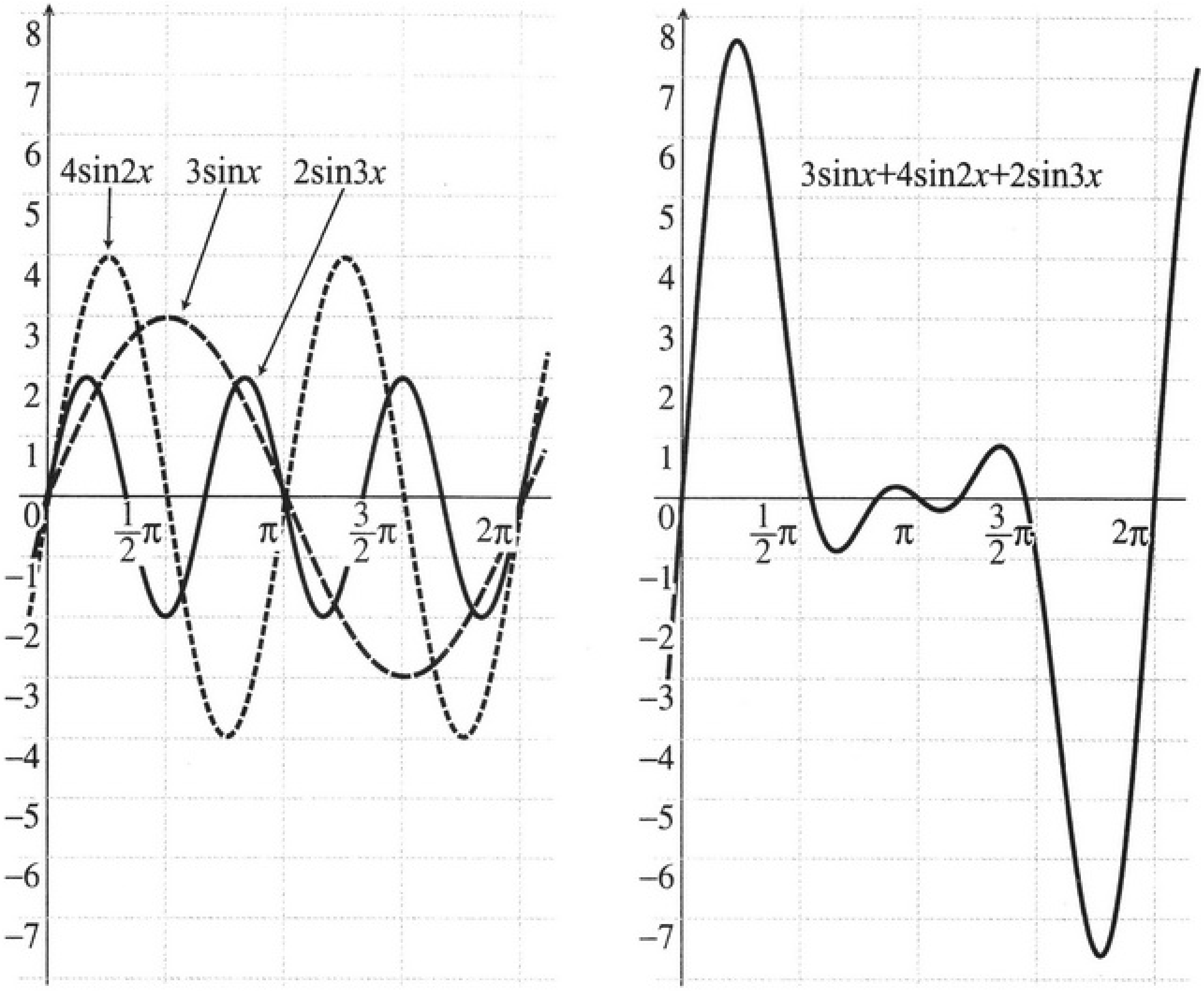
◆图6.19　将图6.17用频率谱表示的图象

的确是呢！好快啊，觉得好怀念啊……

文香……

现在还不是沉醉于感慨的时候，从现在开始才进入正题。来看看实际中这些波形的合成吧。

在半径为 3 的圆周上，以 ωt 旋转的点可以用 $y = 3\sin x$ 表示。同理，在半径为 4 的圆周上，以 $2\omega t$ 旋转的点可以用 $y = 4\sin 2x$ 表示。在半径为 2 的圆周上，以 $3\omega t$ 旋转的点可以用 $y = 2\sin 3x$ 表示。将这些函数加起来得到的结果变成这样了（图 6.20）。



◆图6.20　$3\sin x+4\sin 2x+2\sin 3x$的图象

果然是很复杂的波形呢！

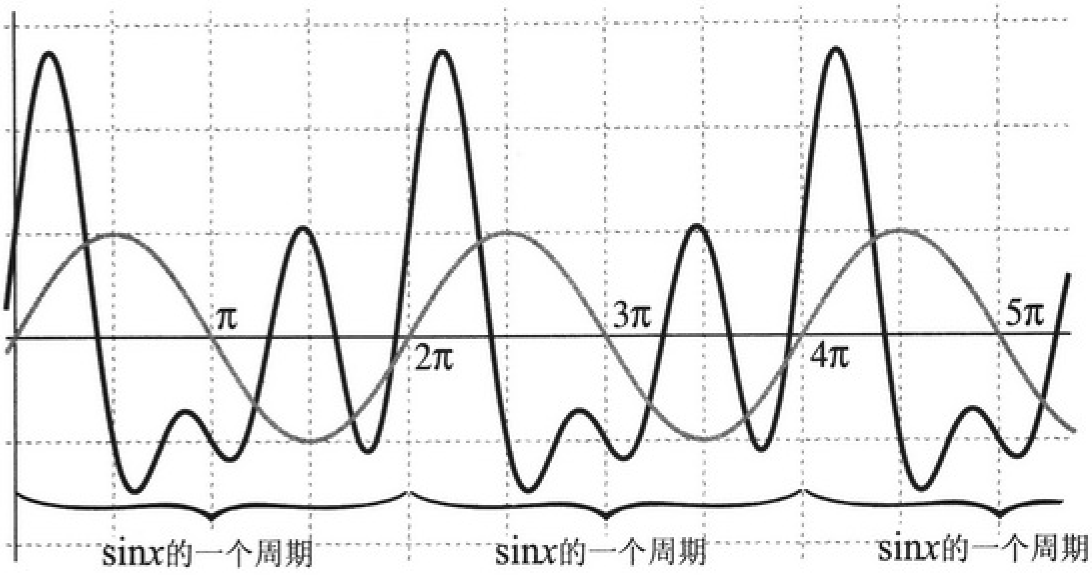
傅里叶变换，就是从这样的加法合成得到的函数中，能将加起来之前的各个函数的周期和大小计算出来。不过，已经讲过了，这里开始采用的傅里叶变换中，任何形状的波形都需要有一定周期重复的性质，即是周期函数。

是这样……不过，这是为什么啊？

那么，来想想原因吧！就像到此为止见过的，将三角函数（周期或振幅不同）组合起来，能得到各种不同形状的波形。这个结果和用傅里叶级数计算出的结果，都是周期函数。

嗯嗯。

例如，将 $\sin 2x$、$\sin 3x$、$\cos x$ 组合加起来，从结果中取出函数 $\sin x$（＝周期最长的三角函数）的一个周期为基准区间，得到有重复部分的周期函数（图 6.21）。

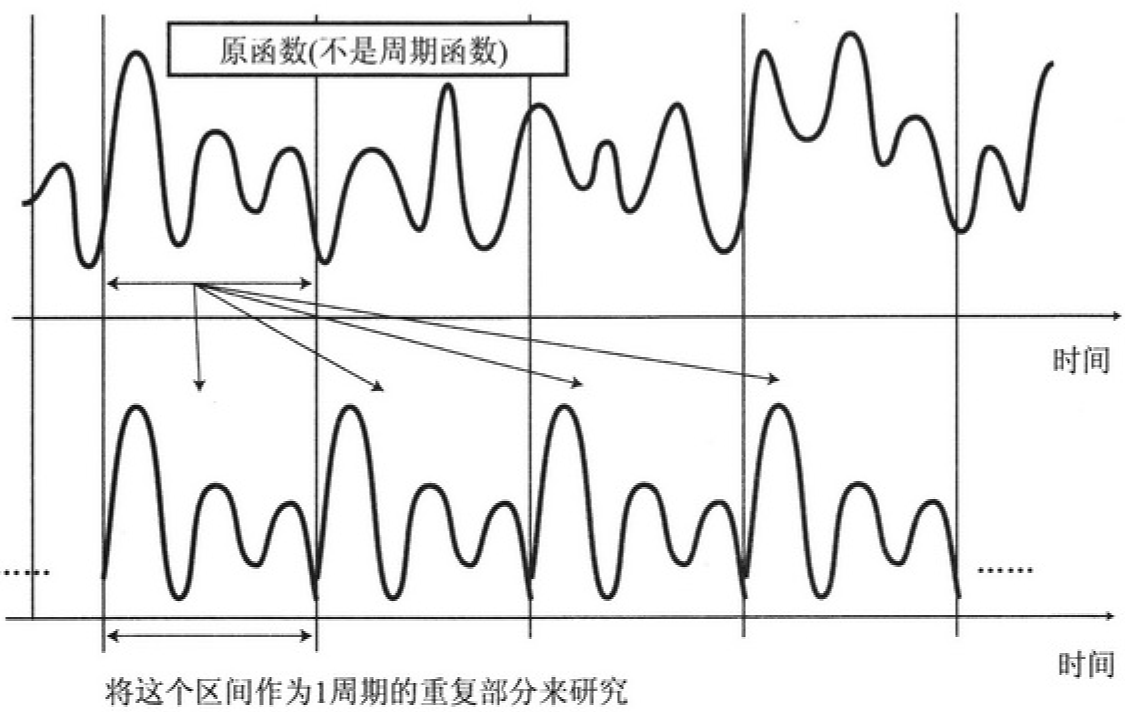


◆图6.21　sin2*x*＋sin3*x*＋cos*x*以sin*x*的一个周期为基准

由于“根据傅里叶级数展开的合成”与“傅里叶变换”有密切相关的联系，通过傅里叶级数得到的函数是周期函数，那么用傅里叶变换计算得到的函数也应该是周期函数。由于傅里叶变换是研究某个函数是由怎样的三角函数组合得到的计算方法，因此，必须对原函数取最长周期对应的“1周期”的长度来进行计算。

哦！终于明白了！

自然现象中有很多波不一定都是周期函数，只需要取出其中一段时间区间，将这段区间不断重复出现形成周期现象，就能采用傅里叶变换进行计算了（图6.22）。



◆图6.22　将复杂波形作为周期函数来研究的方法

6. 傅里叶变换的入口

这么说来，
利用三角函数的合成制作各种波形的
知识已经讲完了！
通过对三角函数的周期与大小的系数的组合，能制作出各种波形呢！
那个公式是“傅里叶级数”……
对！
合成与变换相互为逆运算关系。
那，就像，
……!?
光和影子的关系呢……

将多个函数组合起来叫做“合成”。
研究某个东西是怎样组合而成的叫做“变换”！
傅里叶级数与傅里叶变换有很深的关系呢……
如果密切的关系……
文香既能作曲，吉他又弹得好呢……
是吗？呵呵哈……
这表示，你熟知音乐知识，
有很准的节奏感和音调感。


这些与唱歌能力都有很大的关系，因此也觉得在某种程度上，你唱歌也应该唱得不错……！
你们就……
这么期望听我
唱歌吗？
5555……
呃！
啊……不是，没有这回事！
绘里奈……说错话了……

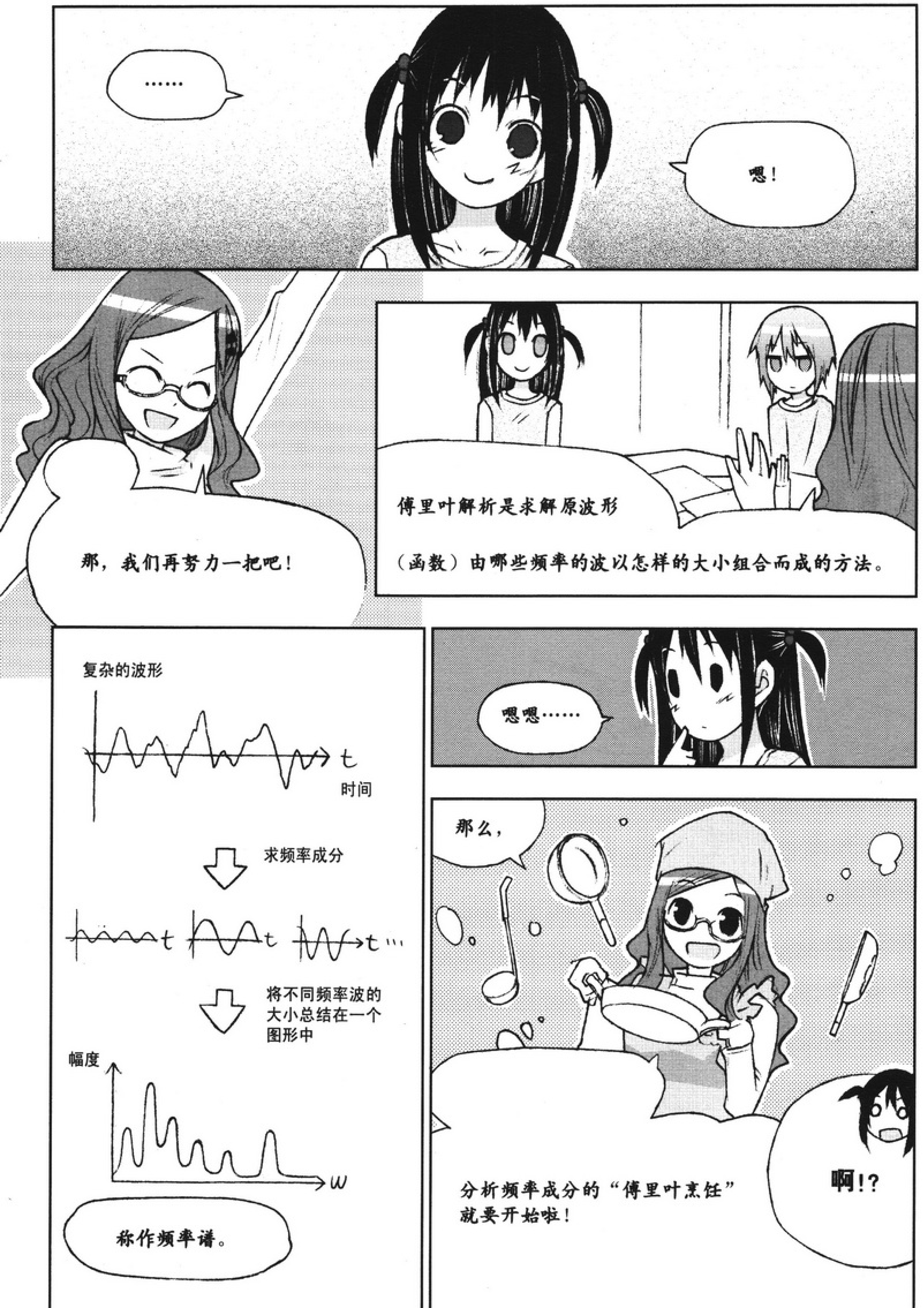

ボーーン
ガシッ
バキバキバキ
ドゲャバゲビョーーン
パピポヨヨーン
根据傅里叶级数的逆向思考方法，采用傅里叶变换对波形进行分析，
きゅ〜
叫做傅里叶解析！

第7章

傅里叶解析

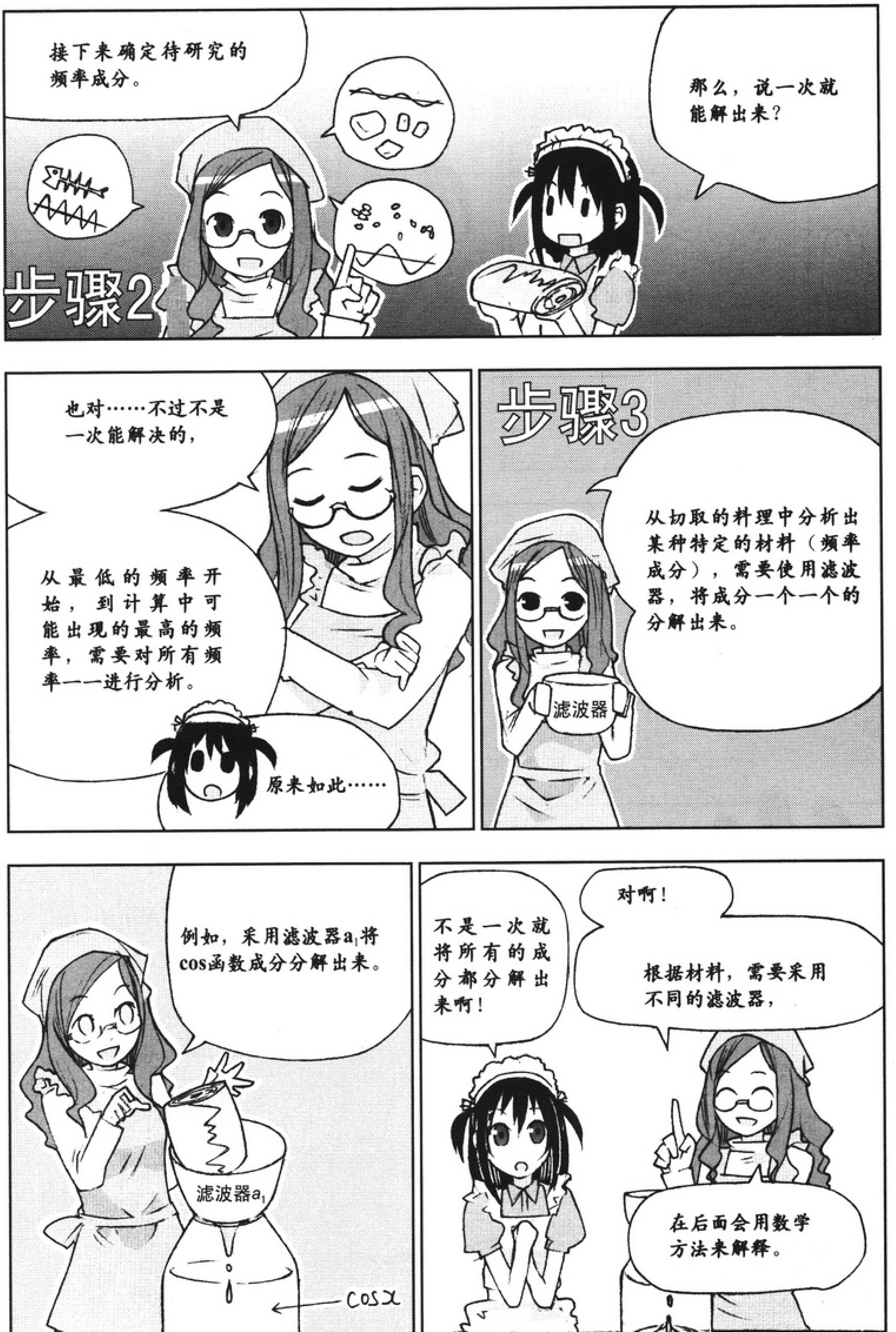

1. 研究频率成分的步骤
どーん
文……文香，
唱得也还可以啦……
呃……
我觉得是很有个性的声音啊!!
果然
是五音不全!
什么!!!
ガッ
ピタ—


好疼……
没事吧？
……
用Excel学傅里叶解析
我们……
在努力学习呢……
对啊！
我们努力了啊！
学习了很多，都学到傅里叶解析了！


……
嗯！
那，我们再努力一把吧！
傅里叶解析是求解原波形（函数）由哪些频率的波以怎样的大小组合而成的方法。
复杂的波形
t
时间
求频率成分
t
t
t …
将不同频率波的大小总结在一个图形中
幅度
ω
称作频率谱。
嗯嗯……
那么，
分析频率成分的“傅里叶烹饪”就要开始啦！
啊!?

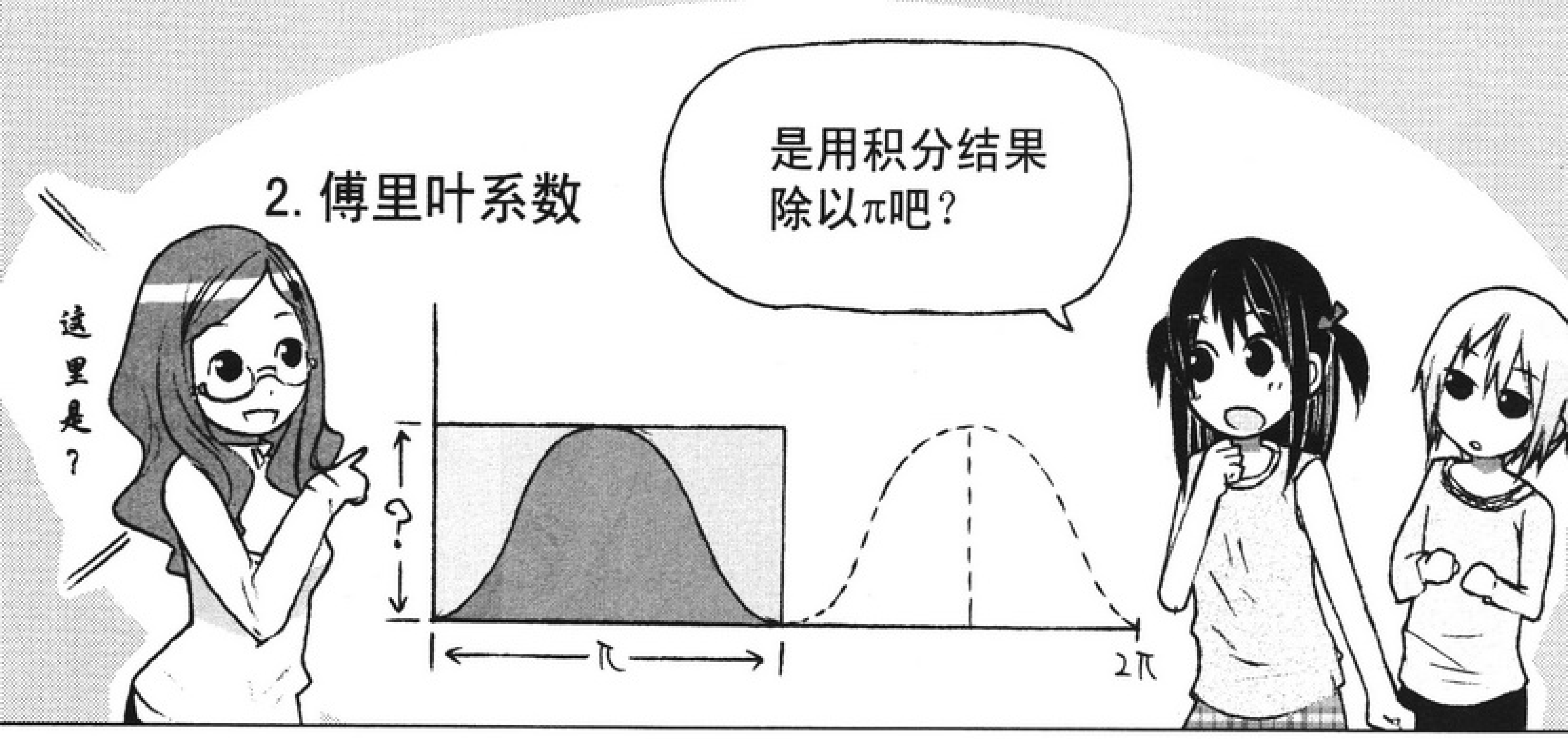
傅里叶烹饪
哦!?
呃……
傅里叶烹饪
哇!
一般做料理是用多种材料做出某种食品。
咖喱
①
②
③
④
黄油炒面
米
洋葱
胡萝卜
肉
傅里叶烹饪是研究食品由哪些材料组成的，将此用频率谱呈现出来。
是一般做料理的逆过程。
这里所说的料理是“波形”。
首先，为了将复杂波形转为周期函数，从波形中取出一段区间。

步骤1
どーん
波形
ピチ ピチッ
スチャ
看什么呢？
如果原波形是像音乐这样的非周期函数，
例如取出一秒长度的区间。
ズバババ
将这个区间看作最大的周期，对应的频率为1Hz，为最小的频率。
1秒
取出的1秒长度的区间中含有振动1000次的成分是频率为1kHz的频率成分。
嗯，嗯。


接下来确定待研究的频率成分。
步骤2
那么，说一次就能解出来？
也对……不过不是一次能解决的，
从最低的频率开始，到计算中可能出现的最高的频率，需要对所有频率一一进行分析。
原来如此……
步骤3
从切取的料理中分析出某种特定的材料（频率成分），需要使用滤波器，将成分一个一个的分解出来。
滤波器
例如，采用滤波器a_1将cos函数成分分解出来。
滤波器a_1
cos x
对啊！
不是一次就将所有的成分都分解出来啊！
根据材料，需要采用不同的滤波器，
在后面会用数学方法来解释。


步骤4
频率成分
测量分解出来的材料（频率成分）的量。
然后依次排开。
如果按频率大小顺序排开的话……
没做过！
就得到频率谱了！
幅度
f
哦！


研究频率成分的概念就与此类似！
到此为止学习的知识，全部要派上用场了呢！
首先，有许多“通过频率谱对音乐的分析”等着我们呢！
加油吧！
哦！加油!!



在这里回忆一下傅里叶系数，傅里叶系数是……

$$F(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

那个，$F(x)$如果是随时间变化的函数，一般用 $F(t)$来表示，在这里一般都用 $F(x)$来表示吧。

以前见过的好吓人的式子…… 但是，好佩服啊，能明白式子的内容！

在这里，“cosn$x$”或 “sinn$x$” 中 x 前面的 n 对应着频率，决定 sin、cos 大小的系数是 a_n、b_n。这里的 a_0、a_n、b_n 叫做傅里叶系数。先前解释的傅里叶烹饪的第三步就是求傅里叶系数。

a_0 也是傅里叶系数？

对啊。a_0 是决定波形的全体值在 y 轴上的上下位置的值。

傅里叶级数中的傅里叶变换中的傅里叶系数…… 好混乱啊……

那先讲傅里叶展开吧！

嗯！

从原波形 $F(x)$ 中求傅里叶系数中的 a_0、a_n、b_n 的过程叫做 “求解傅里叶系数”。
这也就对应着傅里叶烹饪中出现的滤波器的过程。

就是用不同的滤波器将频率成分一个一个地分解出来的过程啊！

也就是，从各种频率成分中，抽取出某一特定的频率成分的过程。

嗯……要怎么做呢？

这里必须想到的是“函数的正交”！由于函数正交的关系，它们乘积的定积分的结果，也就是面积会是怎样的呢？

……0。

对！是 0……也就是可以看作没有了。而且，$\sin nx$、$\cos nx$ 都与自身不成正交关系，都有一定的值。因此，正交关系的性质，使频率成分的分解成为可能。

原来如此！怎么做呢？

首先来看 cos 的傅里叶系数 a_n 吧。
如果想要结果只剩下 $a_n\cos nx$，那么将 $F(x)$全体乘以 $\cos nx$，然后做定积分！这样，就剩下一个 cos 函数的积分值，其他函数都因为正交关系积分结果（面积）都为 0。

剩下的函数是 $a_n\cos nx$ 吧！

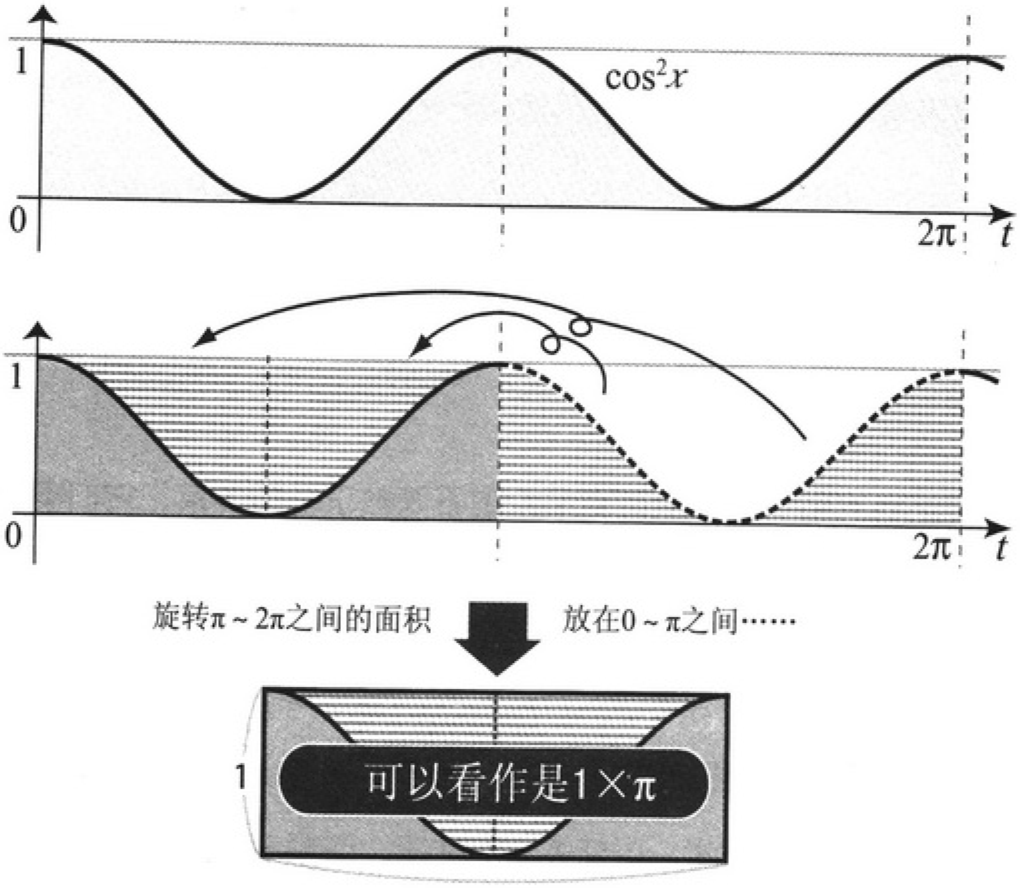
对！在讲函数的正交的时候讲过，周期相等的 cos 函数之间不正交。 $\sin x\times\sin x$

$$\int_0^{2\pi}\sin nx\sin nx\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2nx\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2\mathrm{n}}\sin 2nx\right]_0^{2\pi} = \pi$$

也就是 $\sin^2 x$ 也是同样的情况，以前都讲过的，积分结果等于 π。

同样，$\cos x \times \cos x$即$\cos^2 x$的积分结果也是π。用图形来研究如下图所示（图7.1）



也就是说 $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x$ 等于 $1\times\pi=\pi$

◆图7.1　图形表示的$\cos^2 x$的积分结果

哦！转换成长方形来计算就简单了！

在这里我们想知道的是 a_n，$\cos^2 x$ 对应的系数是 1，因此有 $1\times\pi=\pi$。将此反过来思考一下，如果想知道 a_n，那只要求出式子的积分值，然后除以 π 就行了。

哦！很简单啊！简单得让我眼珠子都快掉出来了。

真要这么说的话，应该是简单得让我眼睛里放光，眼珠子都快掉出来了也太夸张了……

眼睛放光，也很夸张啊……

那个……这个过程用式子表示，$\cos nx$ 的积分式子除以 π 就可看作是乘以 $1/\pi$……

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx\ 。$$

而且，这对于sin也同样成立：$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx$ 。这就是傅里叶级数！

a_0 呢？

那么来看看 a_0 吧。

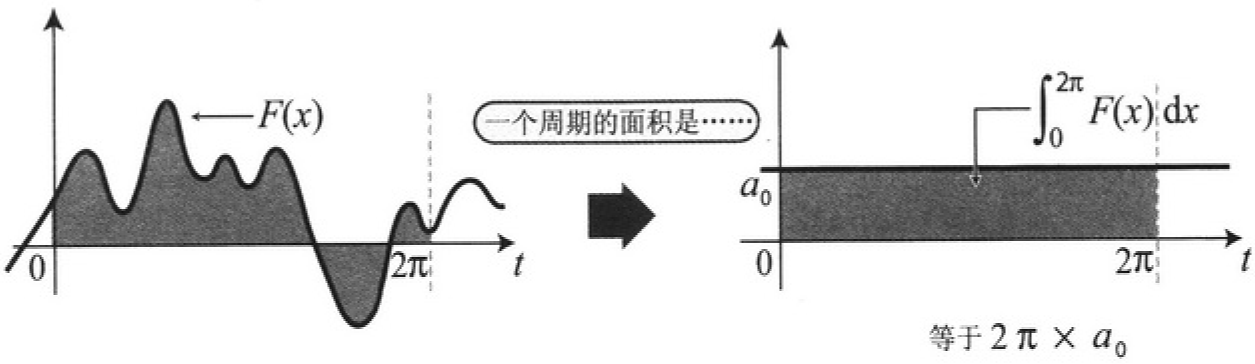
复杂的波形实际上也是由许多 sin 和 cos 函数组成的。而且，无论是 sin 函数还是 cos 函数，整周期内它们的图形围成的面积都是 0。

嗯，嗯。

那么求复杂波形的面积，波峰和波谷几乎都消失了，不过还剩下一定的面积……

那就是 a_0！

对！用图形来表示，那就是这样（图7.2）。



◆图 7.2　用图形说明复杂波形 $F(x)$ 的积分结果

即使是复杂的波形，面积也等于 $2\pi \times a_0$，结果很简单呢！那么，与之前一样反过来思考，要求 a_0 用积分值除以 2π 就行了吧？

对！除以 2π 也就是乘以 $\frac{1}{2\pi}$：$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx$ 。然而，这里需要思考的是“为什么 a_0 要单独表示？”。

嗯？怎么回事？？

a_0 既然带有 a，那也是 cos 的傅里叶系数。

啊，这样啊！

那么，不对a_0进行特别的计算，采用cos的傅里叶系数的计算方法应该是：

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\mathrm{d}x$$

的确是！

不过，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

当 $n=0$ 时，将 cos0 代入计算，求得的结果是 a_0 的 2 倍即 $2a_0$。在此，为了一致，在傅里叶级数前乘以 $\frac{1}{2}$。

啊，那个 $\frac{1}{2}$ 是这样来的啊！

这个以后详细解释……，傅里叶级数的表达式实际是 $F(x)=a_0\cos 0x+a_1\cos 1x+a_2\cos 2x\cdots+b_0\sin 0x+b_1\sin 1x+b_2\sin 2x\cdots$。不过在此，$\cos 0x=\cos 0=1$，$\sin 0x=\sin 0=0$，因此，

$$F(x)=a_0+a_1\cos 1x+a_2\cos 2x\cdots$$
$$+b_1\sin 1x+b_2\sin 2x\cdots$$

啊？ 1/2 呢？

它们用

$$\begin{cases}a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{F(x)\mathrm{d}x\text{（实际上 }a_0\text{ 乘了 }\cos 0x=1\text{）}} \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x\end{cases},$$

表示就行，a_0 和 a_n 分别用 $\frac{1}{2\pi}$ 和 $\frac{1}{\pi}$，真实的 a_0 是 a_n 取 $n=0$ 时的结果的 $\frac{1}{2}$，因此 a_n 取 $n=0$ 时乘以 $\frac{1}{2}$ 就与真实值一致了。

原来如此啊！

再整理一下，傅里叶系数分有三个表达式：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\mathrm{d}x$$

（a_0中的$\frac{1}{2}$是放在积分符号里面还是外面，根据原傅里叶级数的表示方法而定。）

这样就总结了傅里叶系数啊！

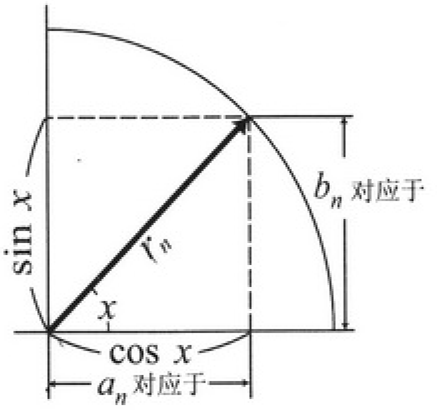
明白了傅里叶系数，就能进行到傅里叶烹饪的第三步了，接下来看看第四步吧！

第四步是分析抽取出来的频率成分的大小。

就目前为止看到的，一个函数的频率成分中既有 sin 函数又有 cos 函数，那么，它们对应的傅里叶系数分别是 b_n 和 a_n。不过，在研究频率谱时，傅里叶系数并不完全等于不同成分的大小，因此需要求解频率成分的大小。

频率成分的大小……？

这里所说的大小，用图形表示的话如图图7.3所示。



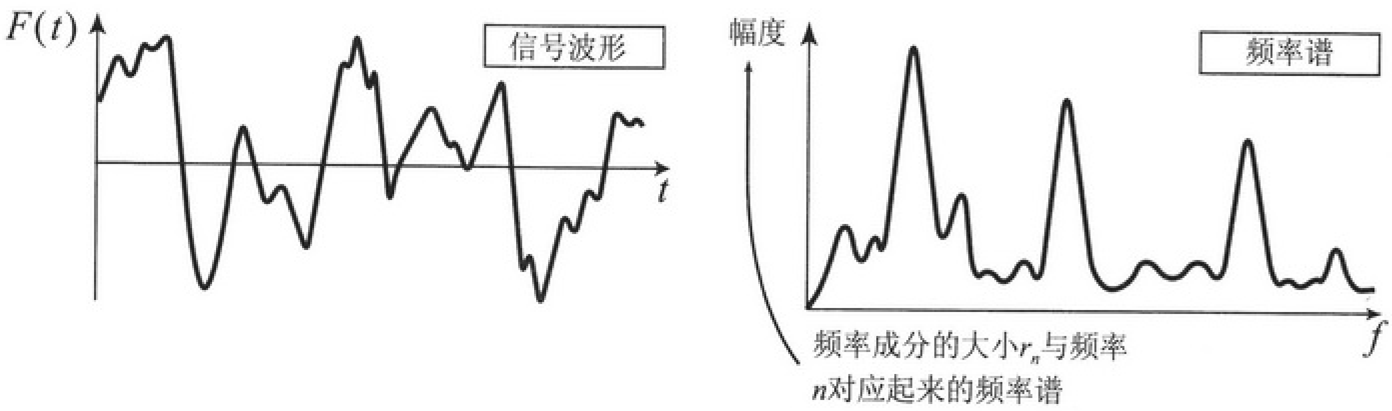
◆图7.3　表示频率成分的大小的图形

三角形的高是用 sin 函数计算出来的 b_n，底边是用 cos 函数计算出来的 a_n……

那么，那个三角形的斜边就应该是频率成分的大小了。斜边的长度，利用毕达哥拉斯定理（平方定理）计算得到：$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$，$r_n > 0$ 。

这样第四步也完成了！

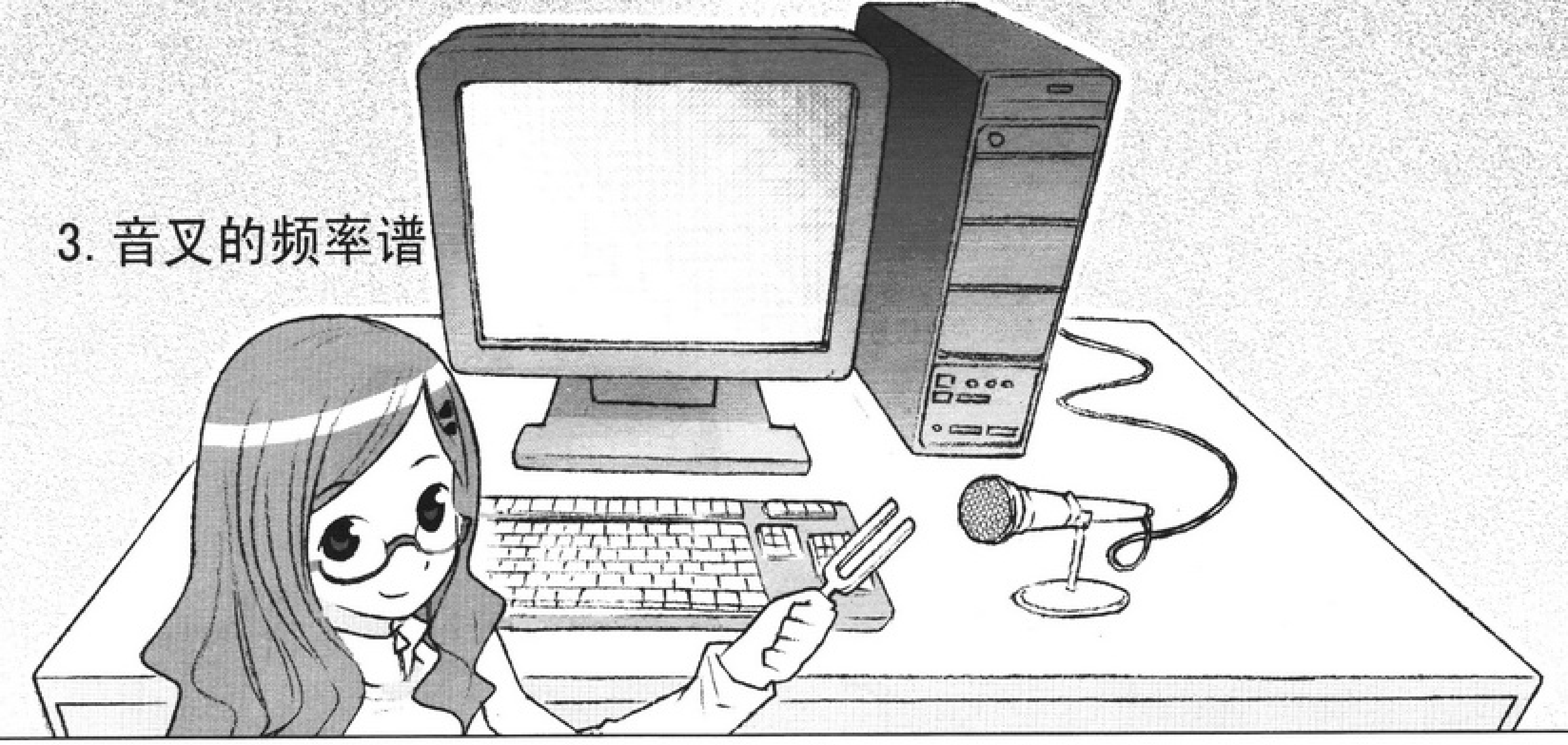
那么到最后的第五步了。将第四步计算得到的 r_n，按照 n 从小到大的顺序排列画在图形中就得到了频率谱。同时，做傅里叶变换的频率解析的函数，是以时间为变量，因此可以用 t 表示的 $F(t)$ 来表示函数。这样就能马上意识到函数的变量是时间了（图 7.4）。



◆图7.4　信号波形与频率谱

哦！终于明白了采用傅里叶变换求频率谱的步骤了！太好了！

3. 音叉的频率谱



那，明白了傅里叶变换的具体方法，来看看各种实际频率谱的解析吧！！

这、这么快啊……我，好感动啊！

真的吗？……

为什么到现在了，还没有一点默契呢！感动！感动！终于明白了傅里叶变换，铃你不感动吗？

……感动。

那……那就好。

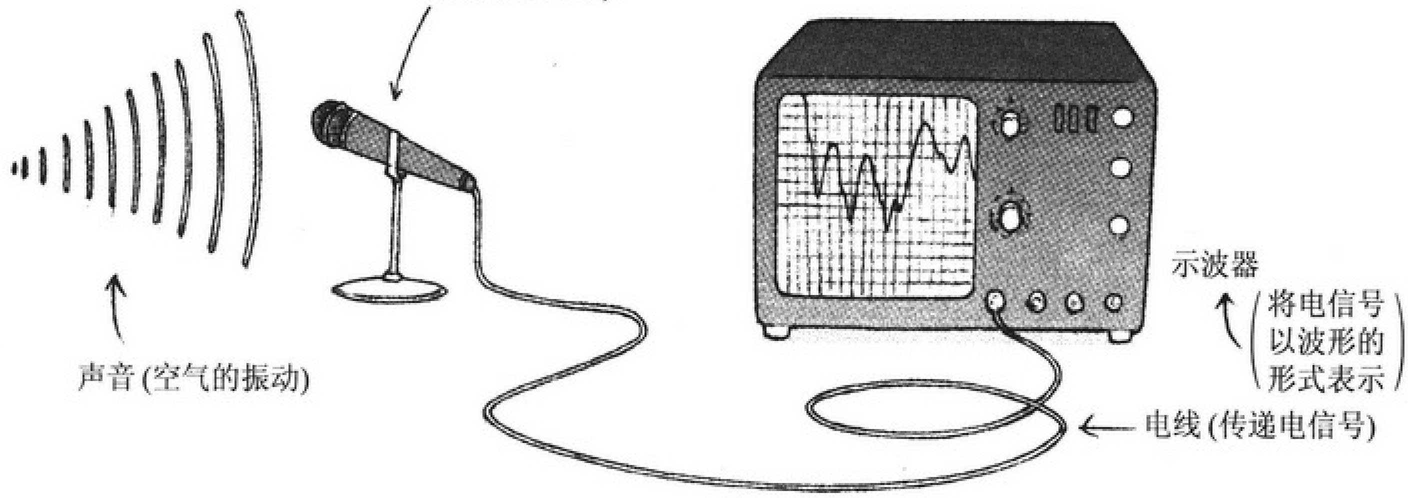
我为你们两个能学到这里也很感动！

首先，在研究实际的频率谱之前，先简单说明一下观测原波形的方法。

对，对！不先得到波形的话，就没法得到频率谱了！

那么，解释一下示波器的使用方法。示波器是将进来的电信号转换为图形的装置。

采用示波器能以波形的图形观察声音（图7.5）。



◆图7.5　用示波器以波形观察声音的方法

简单地说明一下这个图：

① 麦克风将声音（空气的振动）转换为电信号。

② 将转换为电信号的声音，通过电线传递到示波器的入口端。

③ 示波器将电信号从左至右按照时间顺序用图形表示出来。

原来如此！从现在开始每人要有一台示波器呢！

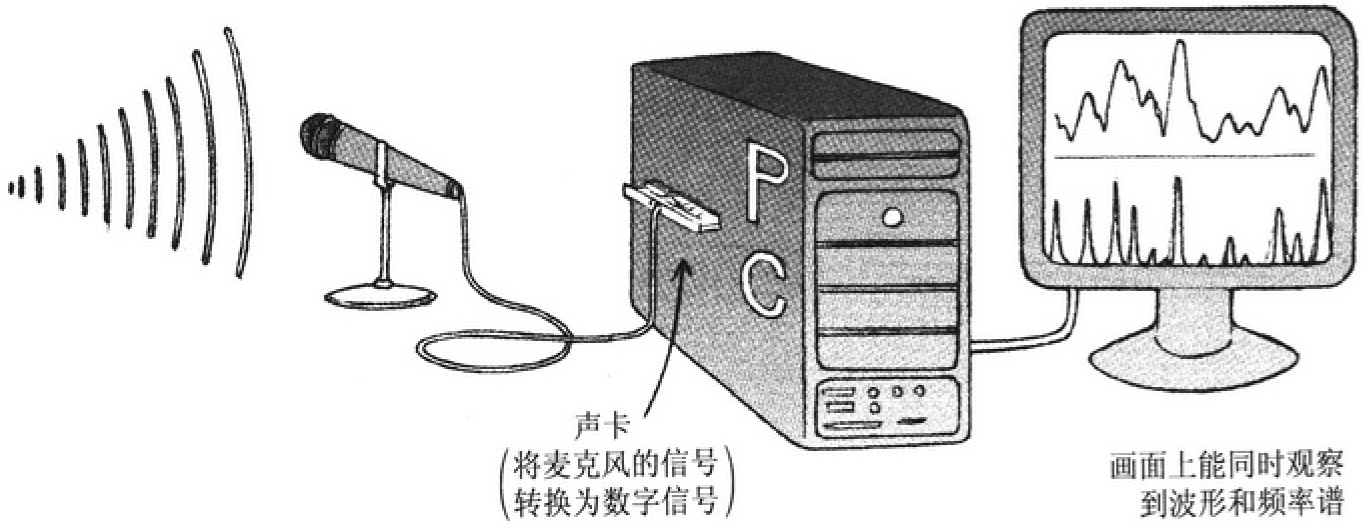
……怎么可能……

铃说得对，说是这么说，每人拥有一台示波器是不大可能的，这里还是要用到电脑！对声音进行计算得到频率谱时，采用电脑会更加简单，效率更高。用电脑也能观察波形，方法与示波器的完全一样。

一般都是采用麦克风将声音录入的吧？

对！电脑中有声卡，将麦克风的信号转换为数字信号，声卡能用于声音的再生，最近已经成为电脑机能的标准装备了。

利用电脑观察声音的波形的方法是这样的（图7.6）。



◆图7.6　利用电脑观察声音的波形

小型电脑也能用声卡。数字化的声音的数据通过电脑的计算能进行傅里叶变换，而且能用图形表示观察频率谱。

哇……果然还是电脑比较方便，我家的电脑貌似专门用来上网的了，没有开发一下其他用途！

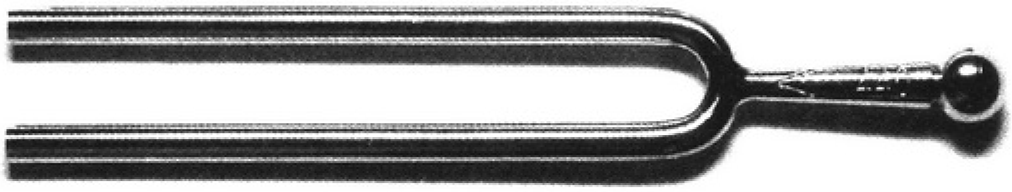
利用电脑计算频率谱的具体方法根据使用的软件不同而各有差别，这里就不详细解释了。之前说过，无需采用专门的软件，用表格计算软件 Excel 就能做傅里叶解析计算。

嗯，嗯。

那么，先来看一下最基本的声音的频率谱吧！

哦！要研究什么呢？

首先是“音叉”！关于音叉最初的时候讲过一点（图7.7）。



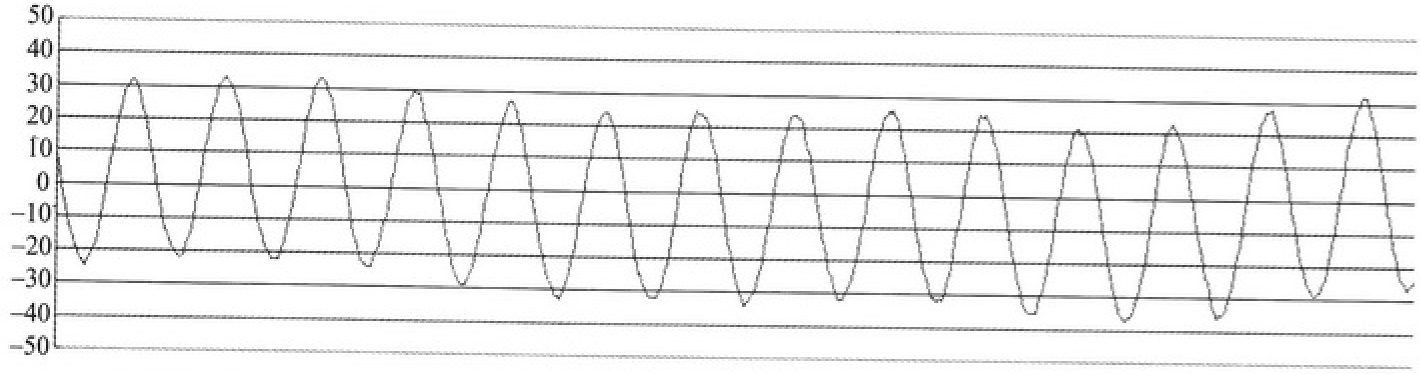
◆图7.7　乐器音调音叉

嗯，嗯。微调时用的音叉。音叉响的时候能得到“拉”这个音。

对！轻轻敲音叉，将手持部分下面的圆球靠近耳朵，或者用牙齿轻轻接触，能感觉到“拉”音的基本频率 400Hz 的振动。

能感觉到“嘭——”比较纯净的声音。

来看看用电脑对这个音进行研究会得到怎样的波形（图7.8）。



◆图7.8　音叉的波形

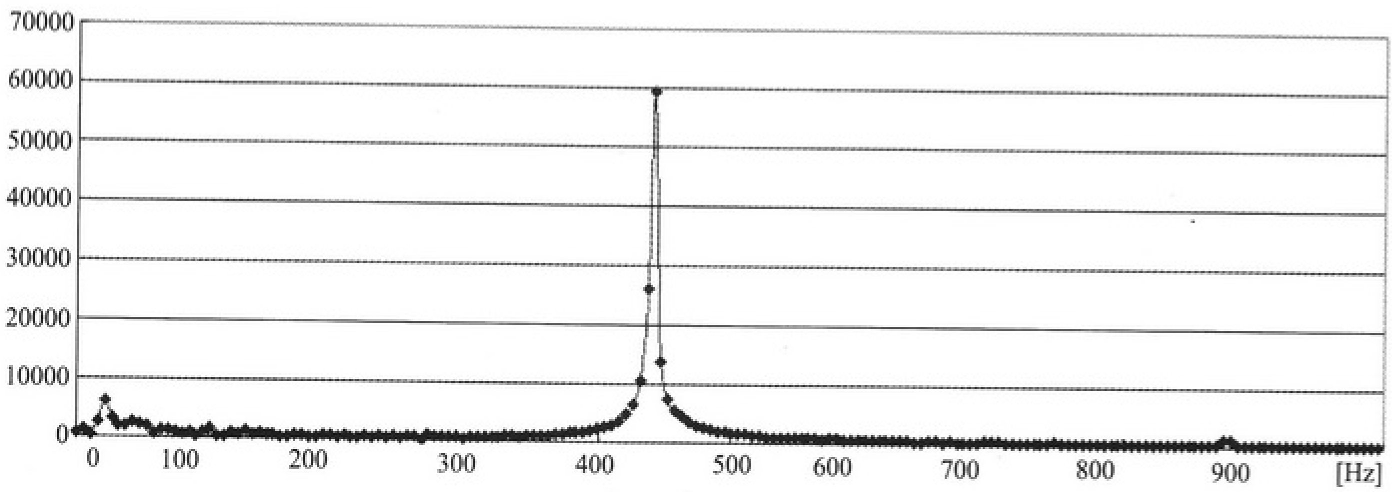
是 sin 函数。

sin 函数……

虽然有点上下摆动，但基本上还是 sin 函数。

嗯……嗯，来从这个波形中计算出频率谱吧。

好，赶快来看这个频率谱吧（图7.9）。



◆图7.9　音叉的频率谱

横轴是频率，单位为 Hz（赫 [兹]），图形的纵轴表示频率谱对应的大小。

刚好在 440Hz 处有峰值呢！

从这个频率谱可以得到，音叉的波形是很单一频率的波。

嗯，嗯！

研究这个频率谱的结果时，虽然看到有若干个误差，但用耳朵听声音，几乎是单一的频率，没有误差。当然每个人感觉不同会有些差别，但一般对于 sin 函数的单一频率的声音，都能听出像“pu”、“ho”这样很简单的声音。而且当频率为 7kHz 以上时，能听到音调很高的音。

能渐渐明白频率谱与声音之间的关系了！

音叉是最简单的例子，不能总结出傅里叶解析的意义。接下来看一下稍微复杂一点的例子吧。

4. 吉他的频率谱

那么这次用电吉他来做实验吧！

哦！吉他！吉他！

……

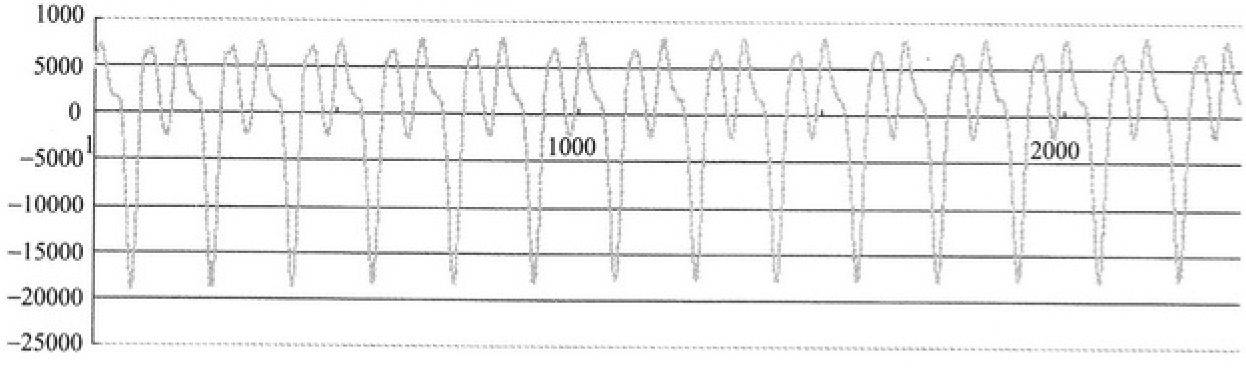
吉他，大家都知道，有6根不同粗细的弦，根据弹的位置不同，发出不同的声音。每次弹一个音连起来能演奏旋律，而同时弹多根弦能演奏和弦，能演奏很多的音乐。

对！

首先请弹奏单音“哆C”音，为了便于声音的分析，请弹奏正确的音调。

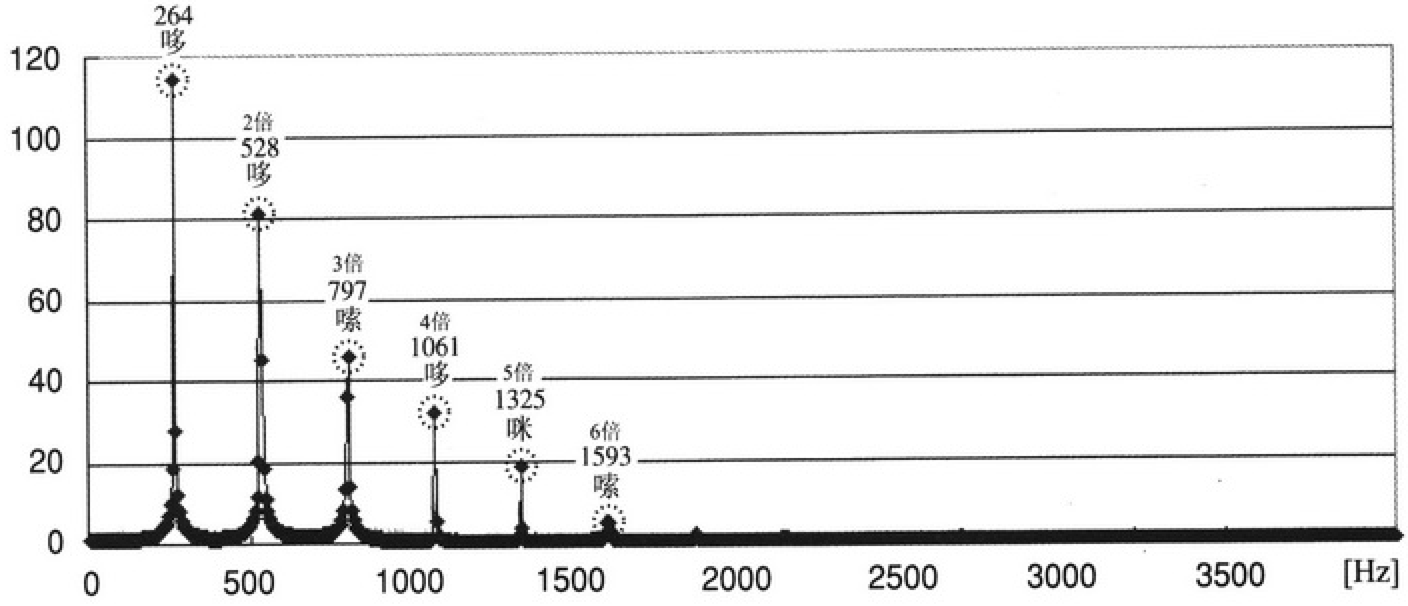
哆……

这样感觉到的是单纯的“哆”音，这个音的波形转换为频率谱，如图图7.10所示。



◆图7.10　吉他的“哆C”音

在这个频率谱中标记出主要峰值的频率，变成如图图7. 11所示。



◆图 7. 11　“哆 C”音的频率谱中的主要峰值的频率

呵呵，这样能看出什么呢？

“拉”音的440Hz 频率是国际标准频率，国际标准的“哆”音的频率是261.63Hz。这个解析结果中幅度最大的频率在 264Hz 处，与国际标准相比，微调一下，与“哆”音的频率很接近……

哦，以前总是很自然的去微调，用这种形式来微调还真是新鲜啊！

那再来按顺序看接下来的有幅度的频率谱，528Hz、797Hz、106Hz、1325Hz、1593Hz，差不多是原来“哆”音的频率的2倍、3倍、4倍……这些频率的幅度大小随着频率增大而渐渐变小。这样的频率谱与之前见过的锯齿波的频率谱很相似。可以说，基准音（频率）“哆”的高音调波中既含有偶数倍基准频率也含有奇数倍基准频率。

高音调波是什么？

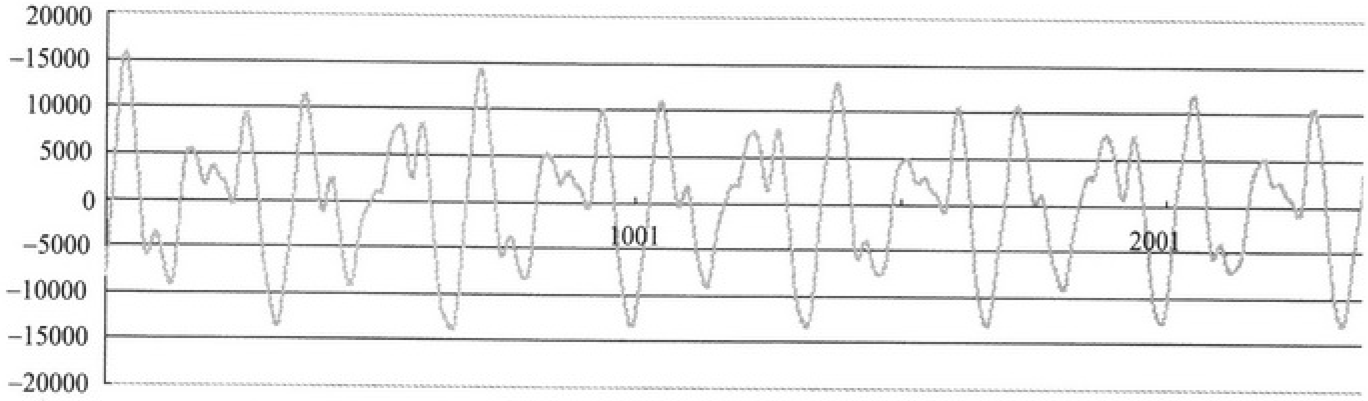
频率是基准频率的 2 倍以上的整数倍的波。

这样啊！音的特征都能用数值表示了呢。

接下来请同时演奏“哆C”、“咪E”、“嗦G”音。

也就是“C大调”呢！

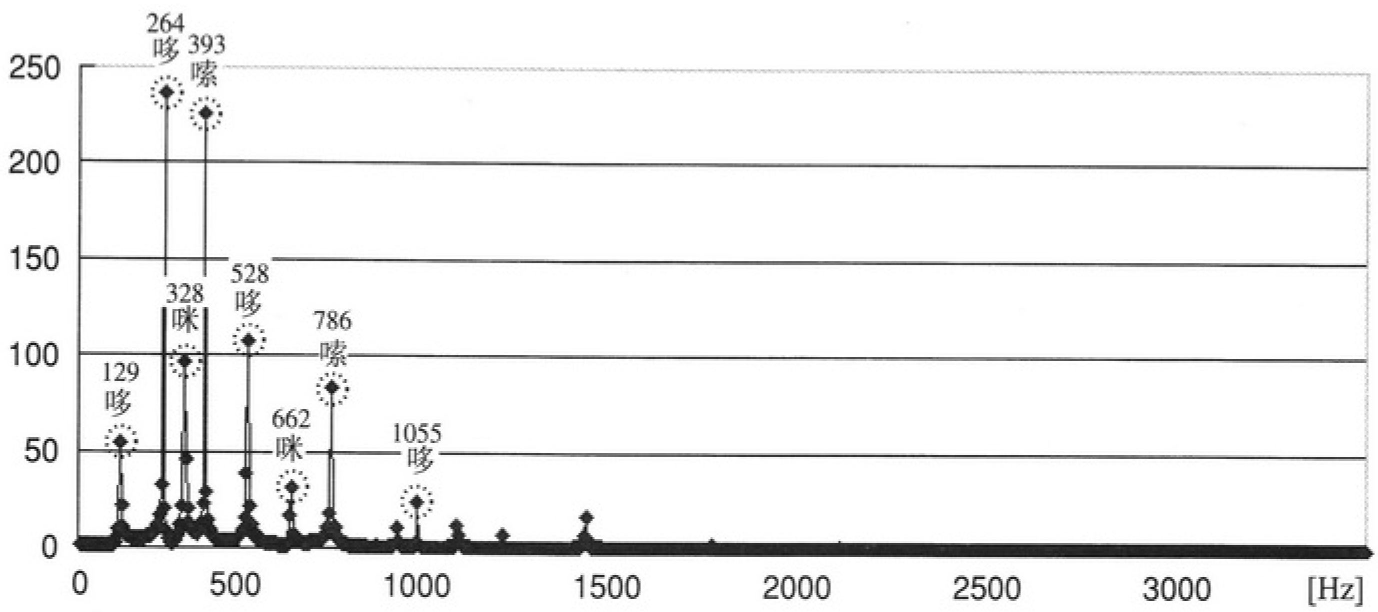
这时波形会是怎样的呢（图7.12）……



◆图 7.12　吉他的哆 C、咪 E、嗦 G 的波形

哇，与刚才的波形相比这个波形很复杂呢！

在这个图形中也标记出峰值出的频率（图7.13）……



◆图 7.13　哆 C、咪 E、嗦 G 音的频率谱中的主要峰值的频率

这次又有什么特征呢？

能很好的确认出哆、咪、嗦的基准音。不过，有趣的是，哆音的高音调波的比例与

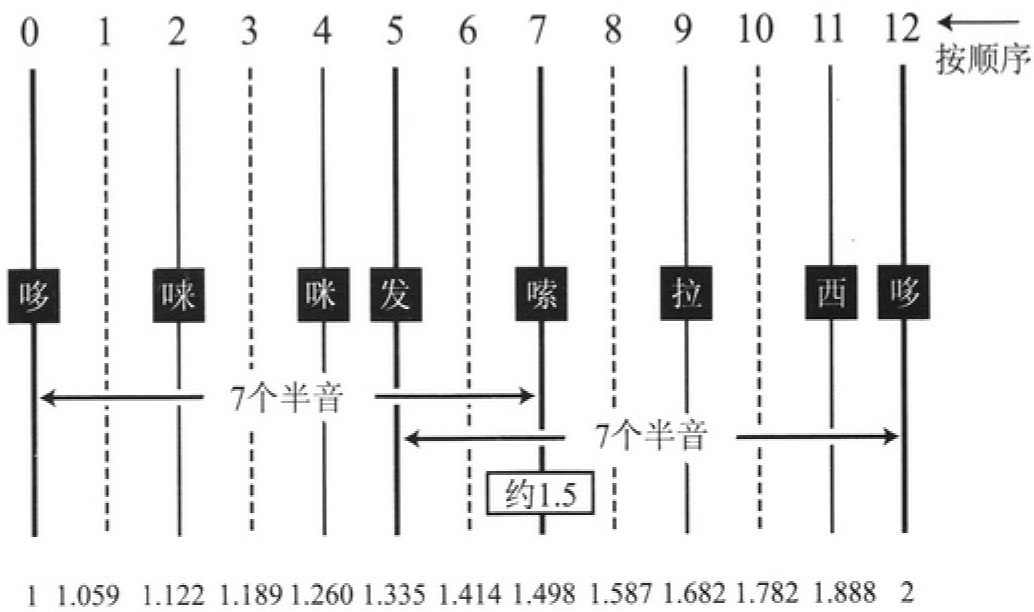
单音中的相比，急剧的减小了。弹奏和音的时候，不是一个一个按顺序的产生出高音调波的能量，而是产生合成后的和音的能量。

呃，好不可思议啊！

再解释一下和音及其频率谱吧。同时弹哆、咪、嗦三个音，咪的频率谱，与哆和嗦的频率谱相比，幅度比较小，来研究一下原因。

好！

键盘乐器或者吉他这样的乐器，都有平均韵律，也就是，一个八度音调差（频率比为1：2）分为12个音阶，相邻音之间的频率比相等，这个比值是2的12次方根，之所以这么说，是因为将12个这样的值相乘能得到2（一个八度音调差）。相邻音之间的差为“半音”（图7. 14）。



一个八度音调差分为12个音阶，每个音阶都叫做半音，相邻音的频率比为 $\sqrt[12]{2}$ 。
(所有相邻半音的频率比都相同，因此叫做12音阶的平均音律 $\sqrt[12]{2}$ = 1.059463…)

◆图7. 14　平均音律半音的概念

呃……

那么，哆与它之后的嗦的频率比约等于1：1.5，也就是2：3。这是因为有7个音阶的原因。像这样简单的整数比表示的频率关系的这些音，相互之间能彼此加强，顺便

说一下“哆与咪”之间的频率比约等于6:7，“咪与嗦”的频率比约等于7:9。这些比值虽然也是简单的整数比，但是与2:3相比还是比较复杂。这些频率比是否简单，与音能否彼此加强有很大关系。比值越简单，二者越能彼此加强。

所以，哆、咪、嗦的和音与咪的单音相比就变小了呢！

对！不过，相比较而言变小了，但是重要的频率成分仍然没有改变，这就是和音的音色比较浓厚的原因。

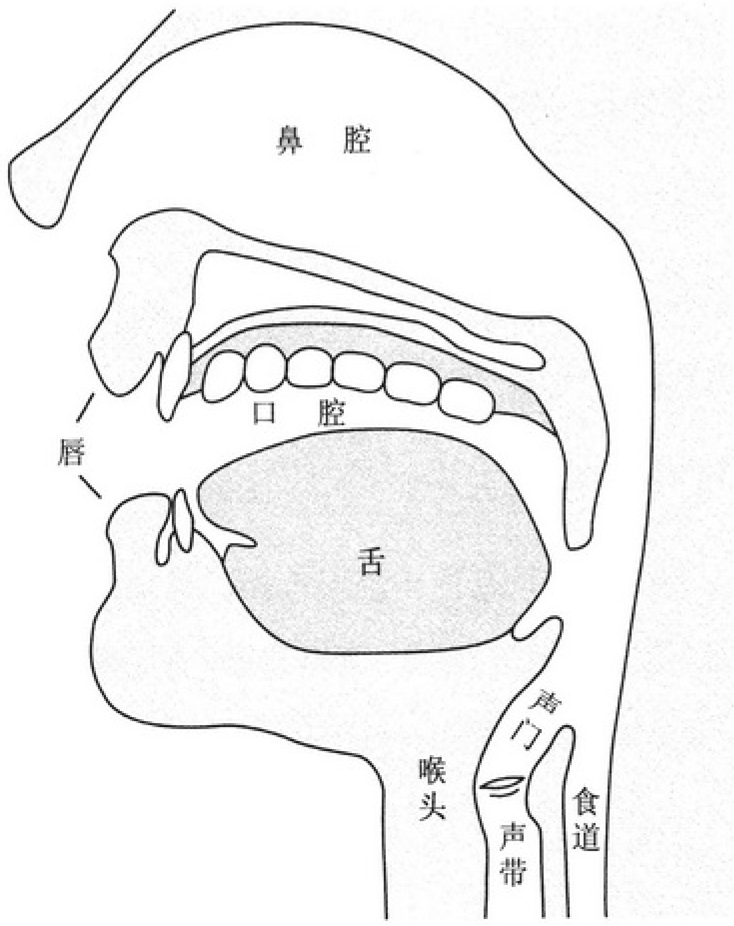
以前只是觉得和音比较浓厚而不知道原因，现在用傅里叶解析从数学上分析的结果中找到了答案呢！

5. 人的声音的频率谱

最后来研究一下人的声音吧！

好！这么快就讲到这儿了……

首先，先简单介绍一下发声机制，从鼻子和口腔进来的空气通过气管到达肺，气管最上面的部分有声带，空气经过的时候，声带产生细微的振动（图7.15）。



◆图7.15　发声器官

听说过“声带”！

声带的大小和厚度因人而异，声带不同，呼吸时空气密度变化的振动周期也不同，由此产生的基本振动近似于锯齿波的波形，含有很多频率成分。

呃……

口腔中有上下颚和舌头，还有嘴唇的位置和形状，这些空洞的形状都不一样。也就是说，通过这些地方的空气的速度会发生变化，而且，从鼻子呼吸的空气的速度也不一样。

好复杂啊……

通过声带振动形成的含有许多频率成分的空气的振动，通过口腔或鼻腔的时候，根据它们的形状会组合出具有许多特征的频率成分。即口腔和鼻腔相当于滤波器，这样人就能发出各种各样的声音了。

不仅仅是发出声音，还有能产生打击乐器等的声音的语音模仿。

在语音模仿中，“无声音”的使用方法很重要。让声带振动发出声音对应着“有声音”，“无声音”是指不让声带振动，只有吸气和吐气发出的声音。

这么说，上英语课的时候也讲过“无声音”……

“有声音”和“无声音”都能根据口腔和鼻腔的形状发出不同的声音。由于每个人的口腔和鼻腔的形状都不相同，因此每个人的声音都有各自的特征。

那，形状相似的话声音也就相似了……

对！例如经常有父子两人的声音的特征很相似，这是由于遗传的关系脸的骨骼相似。还有，国外电影的日语配音也是，选择与演员的脸形特征比较接近的配音人员来配音，也是由于脸的骨骼与声音的特征有关系的原因。

呃！

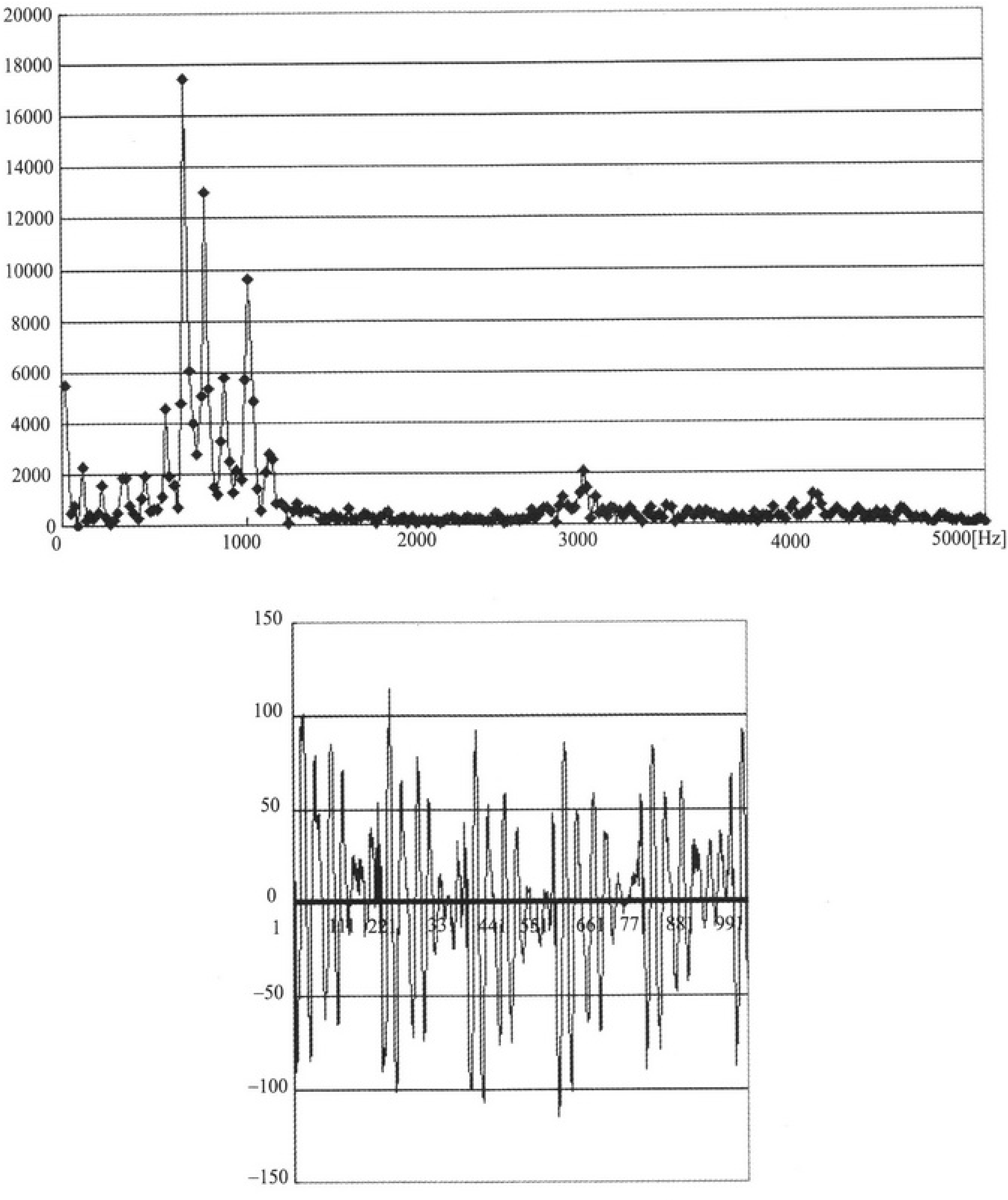
而且，元音与子音的基本频率谱的模式有相似的部分，因此相互可以推导。

确实是呢，比如，巴拉巴拉的说个不停，只听到中间一部分，也能明白在说什么……

文香平时也喋喋不休的，但不知道说些什么……

什么啊！

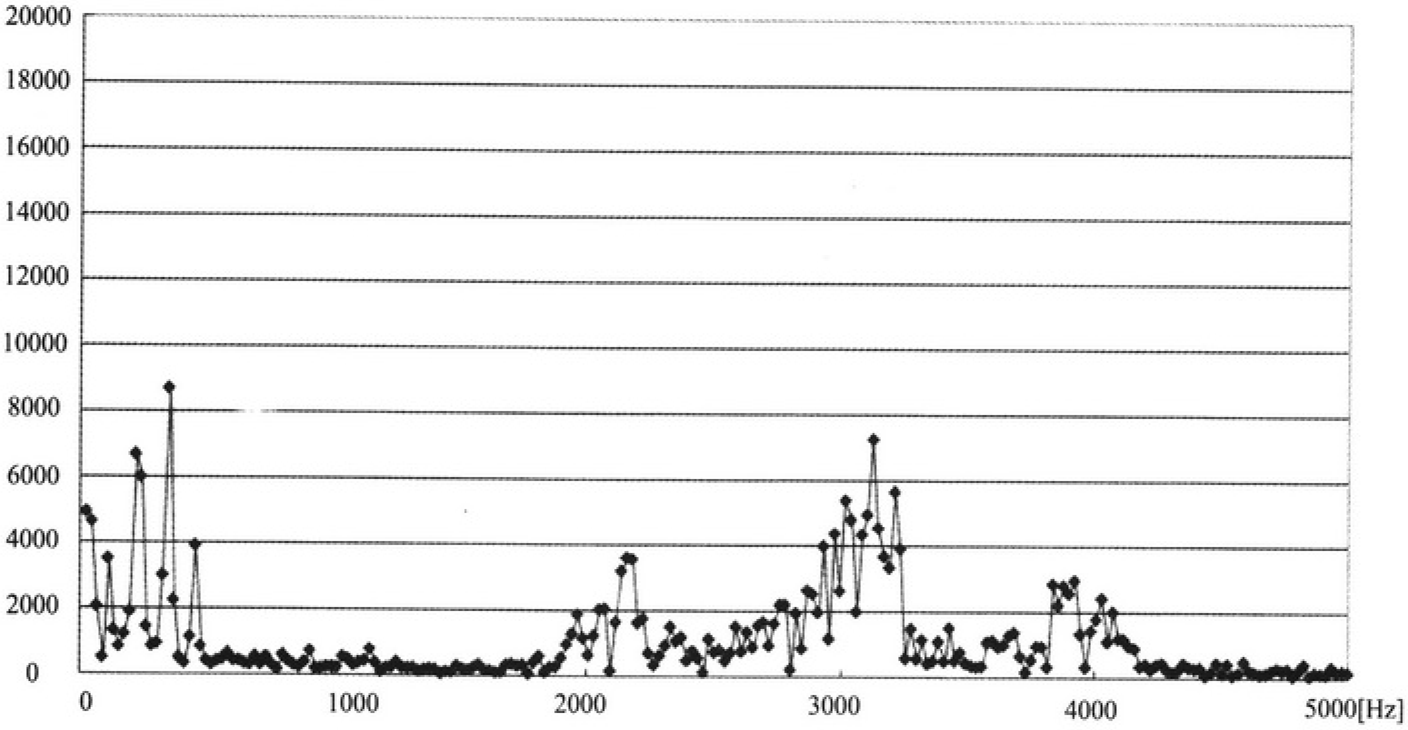
好了，好了……来看一下元音的频率谱的图形吧，首先是“啊”（图7.16）。

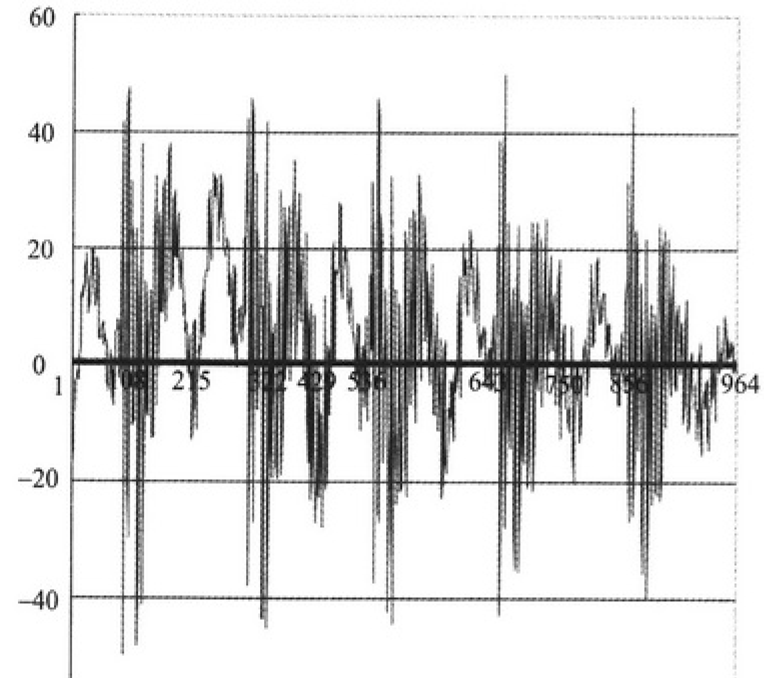


◆图7.16 “啊”的频率谱与波形

这就是“啊”的频率谱啊！

张开嘴发“啊”音，口腔的形状扩大，由于在大空间里高频率的波难以共鸣，因此频率谱主要集中在低频率部分。接下来看“依”（图7.17）。





◆图7.17　“依”的频率谱与波形

很像“依”的频率谱呢！

哪里像了？

是“依”！

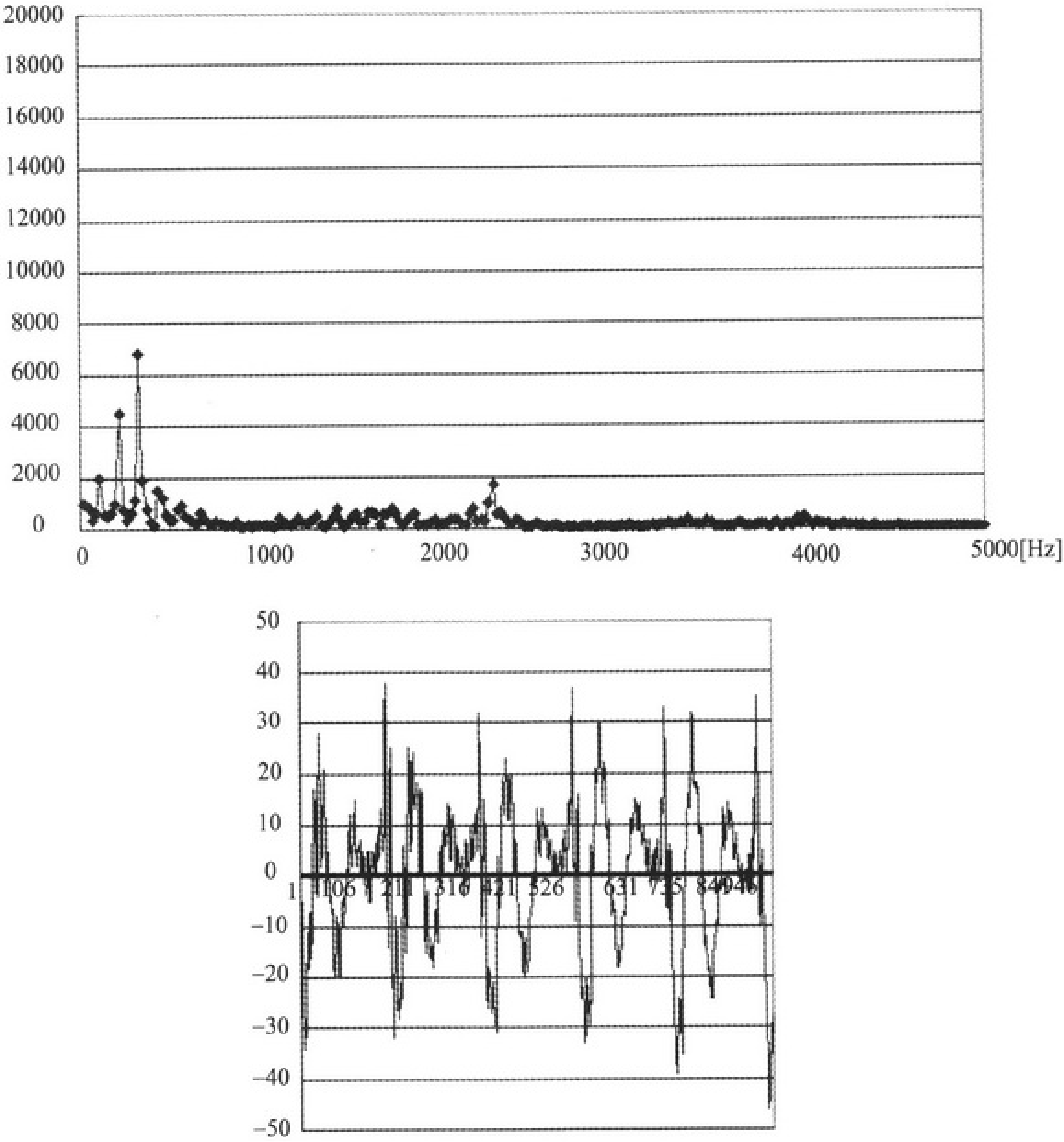
呵呵……想想刚才文香说“依”时候的口形，嘴巴左右伸展，上下平行微微张开，这时，口腔的形状变得扁平，抑制低频率的波的共鸣，与“啊”音相比，能感觉到上颚的微小的振动。

感觉到了？

我没有，你自己呢？

算了，振动很小，不有意去感觉的话是感觉不出来的。这个振动与高频率波的共鸣有关系。频率谱扩展到高频率部分，这些微小的振动重叠在一起形成波形。

接下来是“呜”（图7.18）。



◆图7.18 “呜”的频率谱与波形

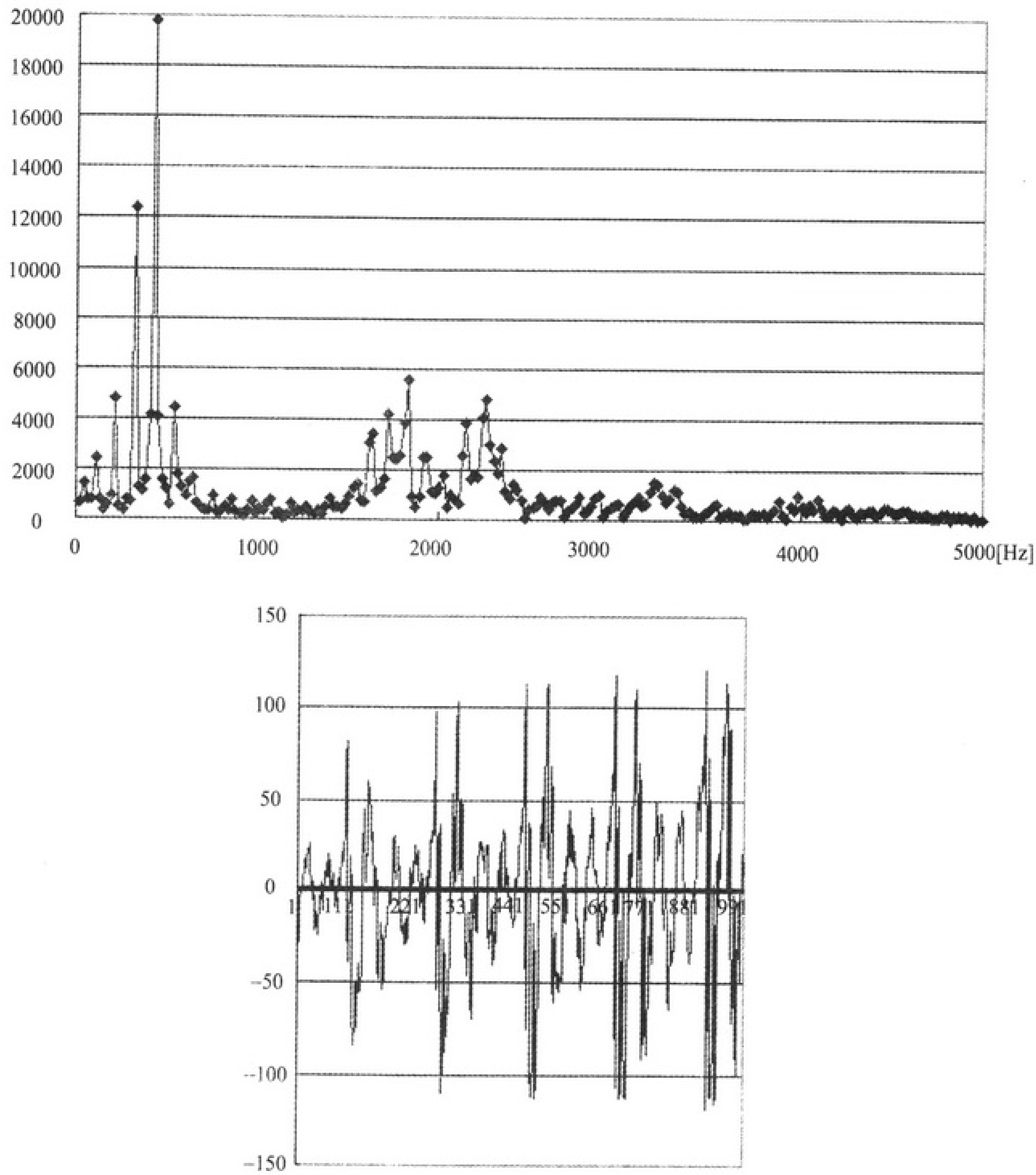
呜……

在干什么？

试着发“呜”看看。

……嘴巴完全收拢时发出的声音，这样，便成了比较低沉的声音。频率谱只取出了元音中的最低频率部分。

接下来是“呃”（图7.19）。



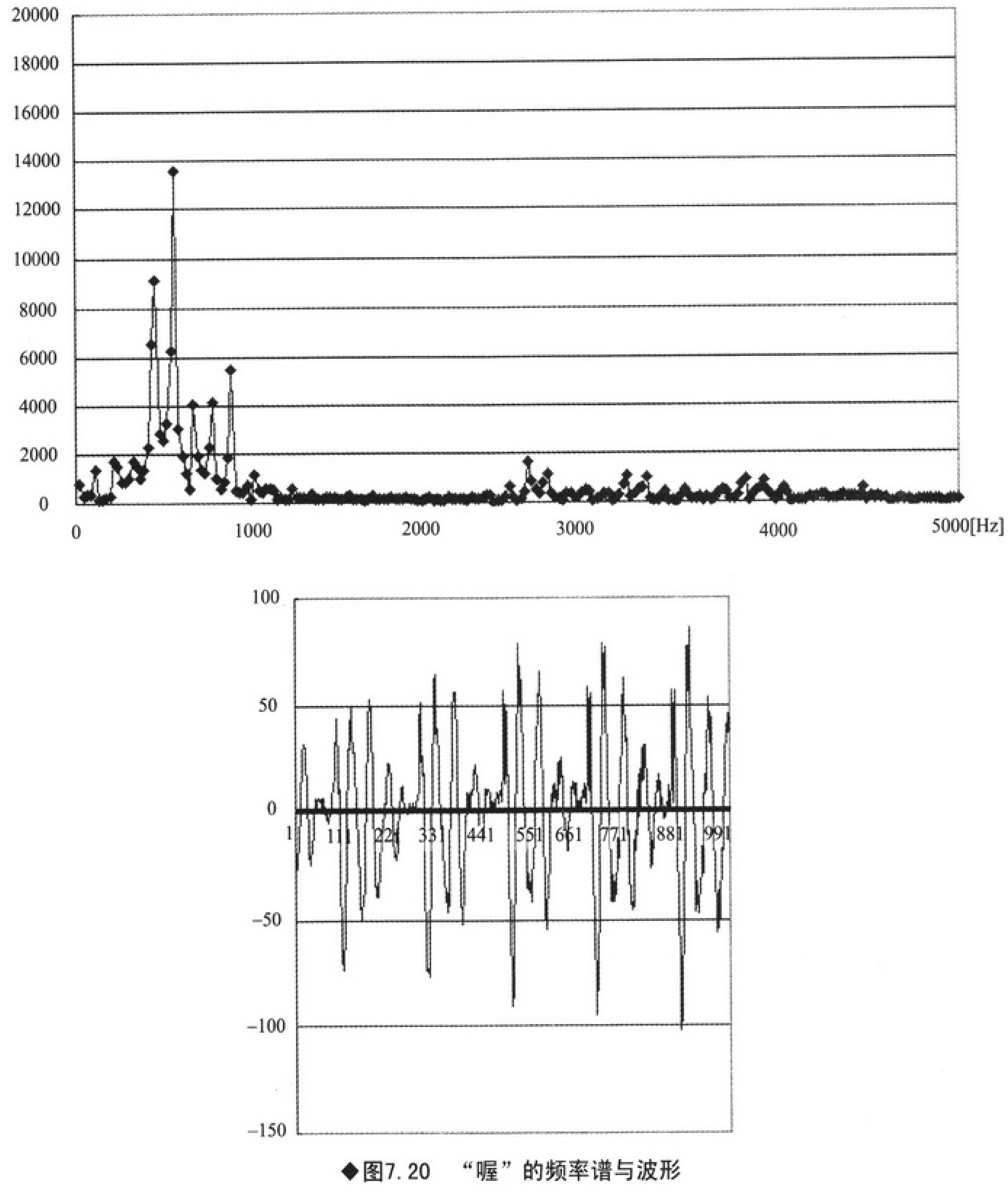
◆图7.19　“呜”的频率谱与波形

……呃？

啊！说出了我想说的……

“呃”与“依”相比，嘴巴上下要稍微张开一些，左右还是伸展开来，上颚放低，产生高频率成分。不过，这个频率成分的中心频率比“依”的中心频率还要小。

最后是“喔”（图7.20）！



◆图7.20　“喔”的频率谱与波形

  喔！

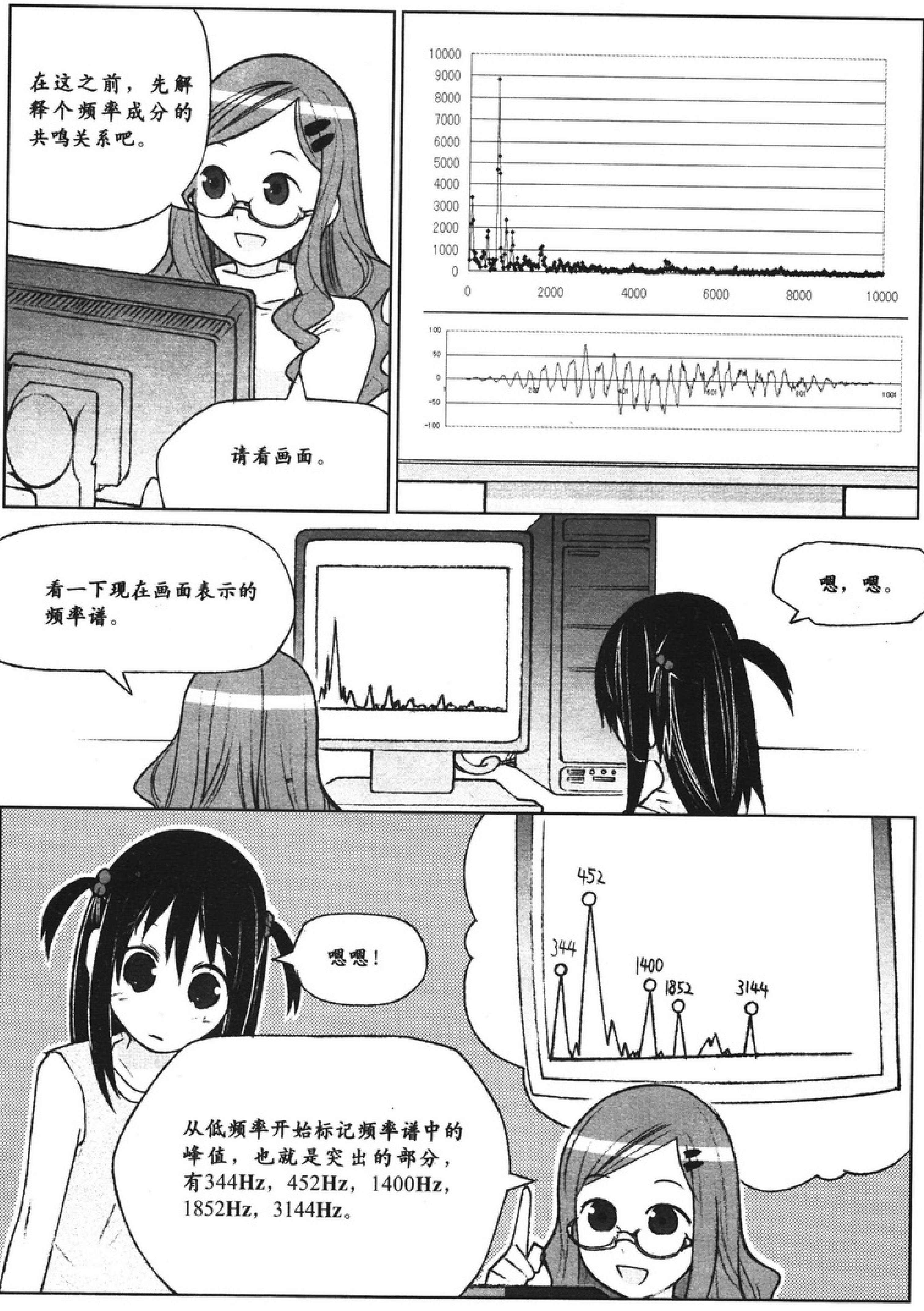
 ……

 ……

 关系真好呢！发“喔”的口形与“啊”的很相似。先发“啊”，接着发“喔”，与从“啊”到其他元音的变化相比，能感觉到“喔”的变化最小。

6. 柔和的声音


对了！这样就能
弄懂好的声音了吗？
差不多了……
说到女生，首先
要明白音域的重
要作用。
音域，是发出的最低的音到
最高的音的音程吗？
对，一般来说，音域
广是好嗓子的一个重
要因素。
接着是，频率谱
中有比较简单的
各种频率成分的
共鸣关系。
呜……
呃，
那就赶快讲嗓子
好的人的声音吧！


在这之前，先解释个频率成分的共鸣关系吧。
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
请看画面。
看一下现在画面表示的频率谱。
嗯，嗯。
452
344
1400
1852
3144
嗯嗯！
从低频率开始标记频率谱中的峰值，也就是突出的部分，有344Hz，452Hz，1400Hz，1852Hz，3144Hz。


共鸣关系是指低音，即，以某个频率为基准，完好的含有这个频率的整数倍的频率的波的状态。
吉他之类的乐器中也有“平衡性很好的低音”……
是指共鸣关系啊！
这里表示的波，
452Hz 大约4倍 1852Hz
大约7倍 3144Hz
344Hz 大约4倍 1400Hz
1852Hz约为452Hz的4倍，
3144Hz约为452Hz的7倍，
1400Hz约为344Hz的4倍，
都很接近整数的倍数关系。
而且1852Hz约等于1400Hz的3/4。
3：4的关系在音阶中相当于“哆（C1）—嗦（G1）—哆2（C2）”的关系，以一个元音为基础，能制作出很好听的和音。
呃！
那这个频率谱就是很好的音了！
……对吧。
这是谁弄的？
啊，
这么一说倒是，是谁啊？


我……
又在开玩笑了……
的确，刚才铃拿着麦克风在玩来着……
……
那……
那，
铃具有当主唱的潜质!?


拥有很好的嗓子呢！
不……不过，离准确的整数倍不是还差一点吗？
与计算不完全一致是因为口腔中还有其他许多影响因素。
不过，
这是决定声音特征的主要因素，所以这绝不是很烂的声音。
铃……
虽然所有的频率谱，都有微小的误差，但是整体上是很单纯的形状。
这是音质纯的声音的特征啊！


来，
来试着唱唱
这首歌。
呃……
……
……
紧张
紧张
咳


声音虽然小了点……
很好啊!!
唱歌之类的,
没有想过……
为什么一直
都不说呢!?
嗯。
……
我也拜托你了!
拜托了……铃!
当主唱吧!
既然你们两个都
这么说了……


太好了！
你们对从随时间变化的波形中求频率谱的解析方法的作用，
怎么样，有点感觉了吧？
有感觉了！
到此，傅里叶解析的基本概念就全部讲完了，
傅里叶解析是很深奥的知识，还需要更加努力地学习呢！
嗯，嗯！
对了，
已经确定主唱了，给我们的乐队起个名字吧！
说得是，到现在还没有名字。
有什么好的建议吗？

我们三个人的名字的
第一字组合起来……
那，这样这吧……
接下来……
文化节当天——
ワーッ
ワイワイワイ


谢谢！！
那么，
来看看“思念”乐队的分数吧！
啪！
啪！
啪！
啪！
哦……！
93分！
好高的分数啊！
这分数还可以吧……
接下来轮到文香你们了，要全力以赴哦！

……啊！
没有主唱！
不是在吗？
喂，
喂……
不会
是你准备去唱吧……
终于到最后一个
乐队了！！
能超越“思念”
乐队吗？这个
今年第一次参加的
乐队……
“傅里叶”乐队！
呼……


那个沉默寡言的
铃……
骗人的吧！？

锵！
哇！
那么“傅里叶”
乐队的得分是？
哇！
哦……！
93分！
今年“思念”
乐队与“傅里叶”
乐队并列第一！
哇！
哇！


……!!
……
貌似是呢！
要到下一场决胜负了呢！
呵呵呵！
啊哈哈！
喂，走吧！
在欢呼……
安可！
听！
安可!!
一个音一个音都重合在一起了……
我们也走吧！

在这一瞬间变成一个声音！
我们的“傅里叶”
现在才开始呢！

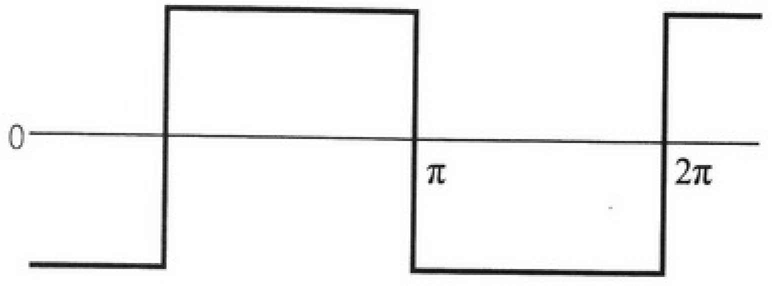
附　录

通往傅里叶级数的代数运算的应用例题

■ 求无限级数的和的例题

在此利用傅里叶级数，来计算某个无限级数的和吧。

$\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\cdots$ 这个级数和是



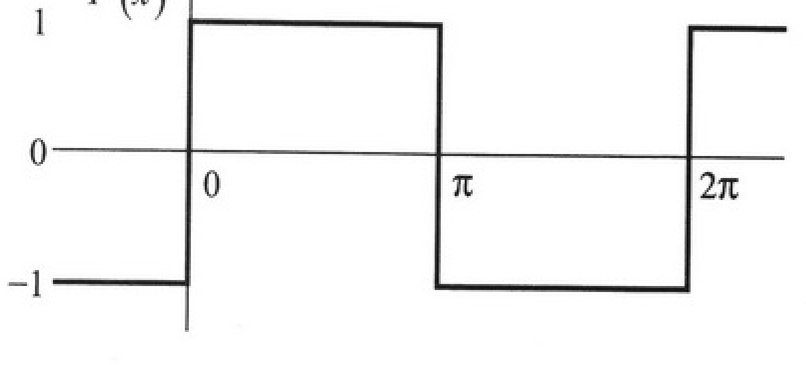
图形为这种形状的函数，这个例子在讲第5章的傅里叶级数的时候出现过。

当时没有详细解释这个例子的振幅。

在此，求决定这个函数的形状的傅里叶系数。有 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$，能计算出这个无限级数的和。

■ 步骤1-1

那么，赶快来求下面函数的傅里叶系数吧。

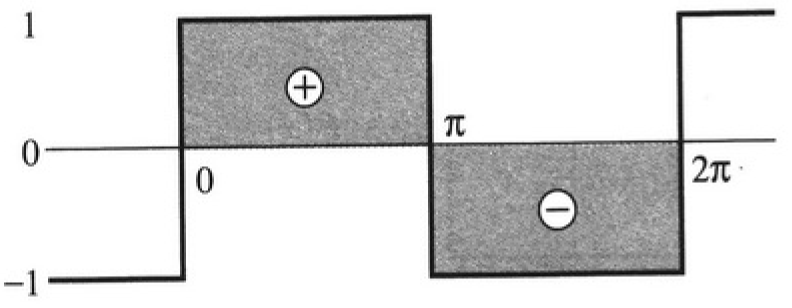


$$F(x)=\begin{cases}+1 & (0\leqslant x<\pi)\\ -1 & (\pi\leqslant x<2\pi)\end{cases}$$

首先是a_0为

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} F(x)\,\mathrm{d}x\right) \qquad \text{将}0\sim 2\pi\text{分为两部分} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} (-1)\,\mathrm{d}x\right) \longleftarrow \text{代入}F(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left([x]_0^{\pi} - [x]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(\pi - 0 - 2\pi + \pi) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

我们先只看原函数 $F(x)$ 的图形形状，由于⊕部分与⊖部分的面积相等，所以只看图形便可知道结果为 0。



■ 步骤1-2

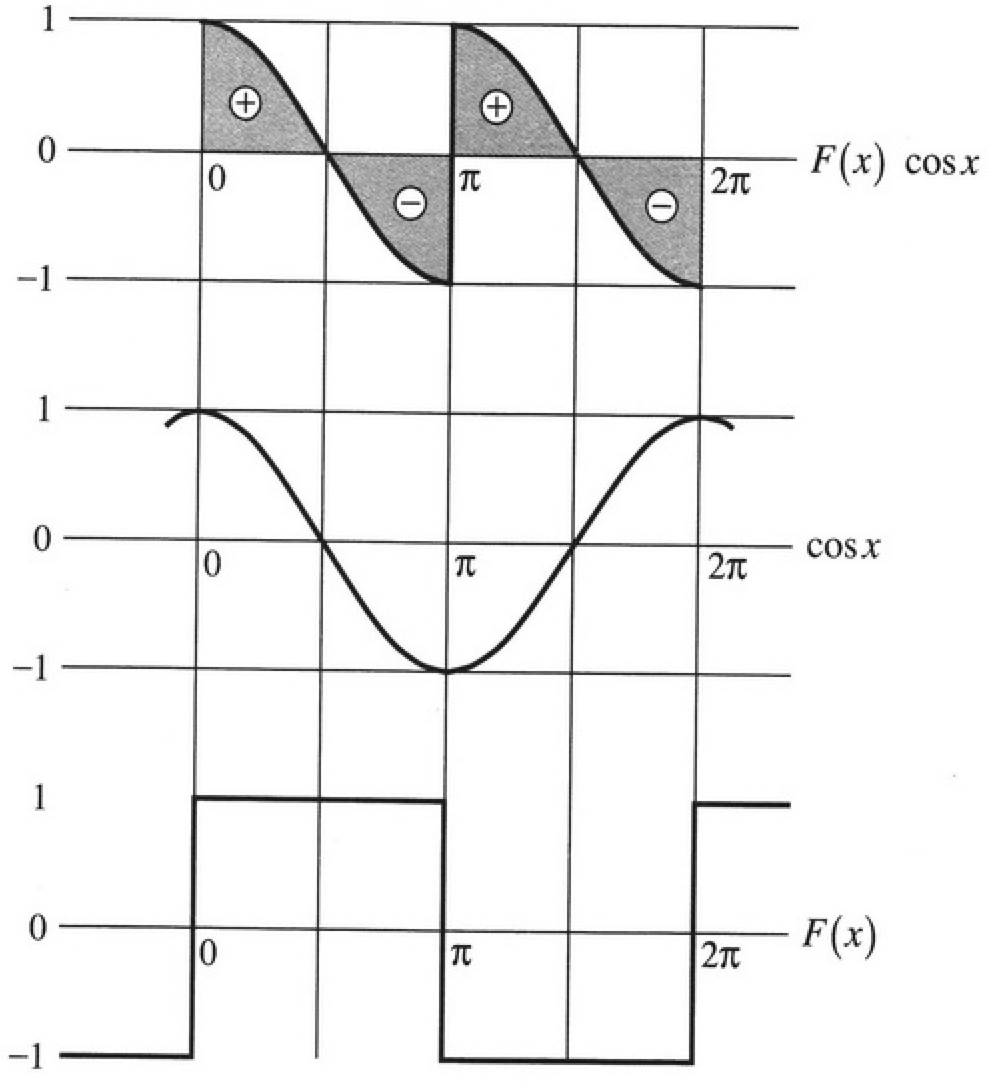
接下来看看 a_n 项是怎样的。

在第 5 章讲过，a_n 项是对 $F(x)$与 $\cos nx$ 的乘积求积分的结果，如 a_1 可通过 $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos x\,\mathrm{d}x$ 计算出来，不过在计算前，我们先来通过图形求一下结果。

如图所示，⊕部分与⊖部分的面积相同，相互抵消。那么 a_2 又是多少呢？也来看看图形。

相邻的⊕部分与⊖部分的面积都相互抵消了。

同样 a_2 之后的 a_n，⊕部分与⊖部分的面积都相互抵消了，因此可以马上明白所有的 a_n 都等于 0。



接下来，对 b_n 从 b_1 开始计算吧。

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi}(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left([-\cos x]_0^{\pi} + [-\cos x]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\{(1+1)+(1+1)\} \\
&= \frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

即，$b_1 = \dfrac{4}{\pi}$

■ 步骤1-3

下一个来计算 b_2 吧。

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin 2x\mathrm{d}x$$

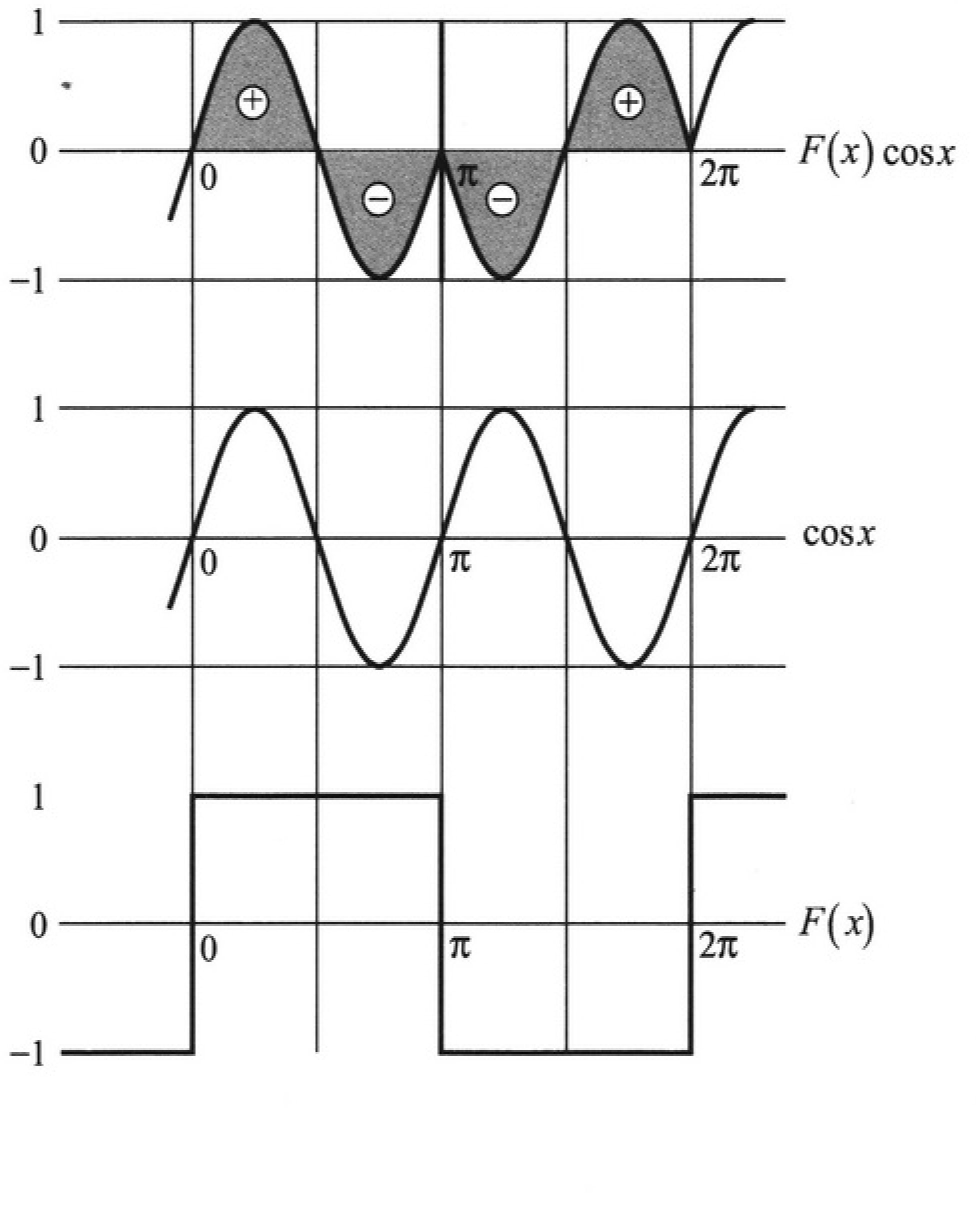
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left(\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}(-\sin 2x)\mathrm{d}x\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}(-1+0+1-1)$$

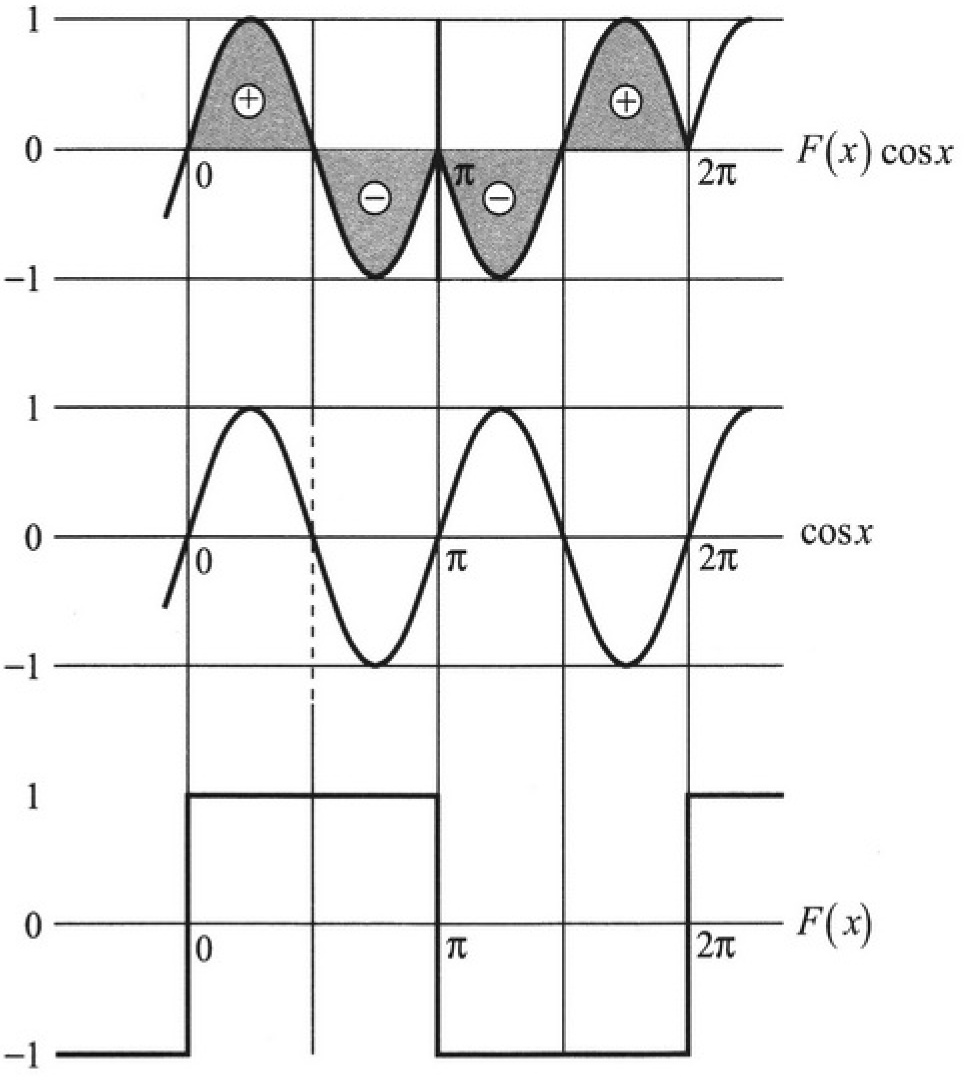
$$=0$$

即，$b_2=0$。如果只看图形也能马上知道结果吧。



像这样，能看出⊕部分与⊖部分的面积相同而相互抵消。

当 n 为偶数的时候，有 $b_n=\int_0^{2\pi}F(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$，从图形中也能得到这个结果。



n=2，4，6…的时候

那么 n 为奇数时，n＝3，5，7， …的时候会是怎样的呢？来稍微计算一下吧。接下来求 b_3。

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin3x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin3x\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}\sin3x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}\left[-\cos3x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{3}\left[\cos3x\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{3\pi}(1+1+1+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{\pi}$$

同样计算 b_n，n 为奇数的时候，可以得到 $b_n=\frac{1}{n}\frac{4}{\pi}$。这样所有的傅里叶系数就计算出来了。

■ 步骤2

将计算出来的系数代入得到F（x）的傅里叶级数的表达式：

$$F(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\cdots\right)$$

用总和计算符号$\sum$来表示得到：$F(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$（$n$为奇数）。在此将“$n$为奇数”用数学表达方法来表示：$n=2m+1$（$m=0$，1，2，…）

因此 $F(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x$

■ 步骤3

在此由于$\sin\frac{\pi}{2}=1, \sin\frac{3\pi}{2}=-1, \sin\frac{5\pi}{2}=1\cdots$ 将$x=\frac{\pi}{2}$代入得到：

$$\begin{aligned}F\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)\\&=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}(-1)^m\\&=\frac{4}{\pi}\left(\underbrace{1}_{m=0\text{时}}+\underbrace{\frac{1}{3}(-1)}_{m=1\text{时}}+\underbrace{\frac{1}{5}(-1)^2}_{m=2\text{时}}+\frac{1}{7}(-1)^3+\cdots\right)\\&=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right)\end{aligned}$$

当 $m=0$ 时，当 $m=1$ 时，当 $m=2$ 时，

且，从原函数F（x）的图形中可以得到 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，因此有

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right)$$

等式左右两边同时乘以$\frac{\pi}{4}$得到

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

等式左边的级数的和等于$\frac{\pi}{4}$。

也可以等式两边同时乘以4，然后对级数和用总和符号表示得到：

$$4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=\pi\text{ 。}$$

■ 实际的级数和的计算

事实上，可以用计算机来计算这个级数的和，各项级数结合“＋”与“－”依次累加起来，当累加到 $m=100$ 时，仍有 1/201 （约为 0.5%）的误差而不收敛。

实际上试着用 Excel 计算，当 $m=100$ 时级数和为 3.15149…，$m=101$ 时为 3.13178…，$m=10000$ 时为 3.14169…，$m=10001$ 时为 3.14149，可以看出结果围绕 π 值上下振动变化，并慢慢收敛于 π（参考下页的表格）。

类似这样，用傅里叶变换从求傅里叶级数开始计算，能计算得到无限级数的收敛值。傅里叶变换的应用，与这样的代数计算有很深的联系。

本书介绍了傅里叶变换的入门知识，对于想进一步学习的读者，请参考微积分或者傅里叶变换的其他参考书。

（N-0353.0103）

责任编辑：王　炜　赵丽艳

责任制作：董立颖　魏　谨

封面制作：铭轩堂设计：13671110894

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社　社长 总编
“希望杯”全国数学邀请赛组委会 命题委员会主任
周国镇

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》 原副总编辑
中华炎黄文化研究会 常务副会长
鲁谆

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业 主任
大学日语教学研究会 会长
成同社

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学 能源与动力学院 博士 副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校 校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学 数学科学学院 博士
张磊

上架建议：科普/漫画

ISBN 978-7-03-024962-3

科学出版社 东方科龙

http://www.okbook.com.cn
zhaoliyan@mail.sciencep.com

定价：32.00元